

令和 4 年 6 月 5 日現在

機関番号：32606

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14539

研究課題名(和文)カスプ付き双曲曲面上のカレントの研究

研究課題名(英文)Currents on cusped hyperbolic surfaces

研究代表者

佐々木 東容(Sasaki, Dounnu)

学習院大学・理学部・日本学術振興会特別研究員

研究者番号：60822484

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：双曲曲面 S 上の測地カレント空間 $GC(S)$ は S がコンパクトであるとき、 S 上の重み付き閉測地線の集合の完備化と見なされる。これは重み付き閉測地線に対応する有理的測地カレントが $GC(S)$ の稠密部分集合となるという結果から従う見方である。有理数を完備化し実数にすることで扱いがよくなるのと同様に、測地カレント空間は閉測地線全体を扱うような研究において重要な役割を果たす空間である。本研究者は双曲曲面 S が面積有限カスプ付き双曲曲面である場合にも稠密性定理が成り立つことを示した。さらに、測地カレントの一般化であるサブセットカレントについてもカスプ付き双曲曲面の場合に同様の稠密性定理が成り立つことを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

双曲曲面上の測地カレントはThurstonによって導入された測度付き測地線層(単純閉測地線の完備化)の一般化としてBonahonによって導入された。双曲曲面の変形空間であるタイヒミュラー空間や写像類群の研究とも密接に関係する。近年ではMirzakhaniによって閉測地線の数え上げ問題への応用が見出された。ただし、測地カレントを閉測地線の完備化と見るためには稠密性定理を示す必要があるのだが、これまではコンパクトな双曲曲面の場合にしか示されていなかった。本研究によりカスプ付きの場合でも稠密性定理が示され、測地カレントの研究の基礎的な部分が整備されたと言える。

研究成果の概要(英文)：The space $GC(S)$ of geodesic currents on a hyperbolic surface S can be considered as a completion of the set of weighted closed geodesics on S when S is compact, since the set of rational geodesic currents on S , which correspond to weighted closed geodesics, is a dense subset of $GC(S)$. I proved that even when S is a cusped hyperbolic surface with finite area, $GC(S)$ has the denseness property of rational geodesic currents, which correspond not only to weighted closed geodesics on S but also to weighted geodesics connecting two cusps. In addition, I proved that the space of subset currents on a cusped hyperbolic surface, which is a generalization of geodesic currents, also has the denseness property of rational subset currents.

研究分野：双曲幾何学・幾何学的群論

キーワード：双曲曲面 測地カレント サブセットカレント 稠密性定理 交点数 曲面群 自由群

1. 研究開始当初の背景

本研究における研究対象である双曲曲面上の測地カレントはある種の測度であり、Bonahon によって測度付き測地線層の一般化として導入された。測度付き測地線層は双曲曲面上の"単純閉測地線の測度論的完備化と見なされるのに対して、測地カレントは閉測地線の測度論的完備化と見なされる。ただし、この「見なされる」というのは定義から直ちに従う性質ではなく、稠密性定理を示すことで得られる見解である。稠密性定理とは、双曲曲面上の閉測地線に対応する測地カレント(有理的測地カレントと呼ばれる)が測地カレント全体の稠密部分集合であるという主張である。この主張は双曲曲面がコンパクトな場合(境界付きも許す)に Bonahon によって示されたが、カスパ付きである場合においては示されていない。

また、測地カレントの一般化としてサブセットカレントと呼ばれる測度が近年 Kapovich-Nagnibeda によって導入された。彼らは境界付き双曲曲面の場合に、測地カレントと類似の稠密性定理が成立し、サブセットカレントが双曲曲面の被覆の凸核の一般化と見なせることを示した。この結果は私自身の研究により境界のないコンパクト双曲曲面の場合に拡張されたが、カスパ付きの場合については未解決であった。

2. 研究の目的

カスパ付き双曲曲面上の測地カレント空間およびサブセットカレント空間において稠密性定理を示し、双曲曲面上のカレントの理論の基盤を整備することが本研究の目的であった。ただし、考える曲面は面積有限なものに限る。

3. 研究の方法

本研究によって上記の目的は完全に達成することが出来た。ここでは、稠密性定理の証明の中で役に立った概念や、証明の中で重要な役割を果たした考察について述べる。

測地カレントとサブセットカレントを合わせて簡単にカレントと呼ぶことにする。双曲曲面上のカレントを考える際、曲面のコンパクト性が大きな影響を与える。例えば、カスパから出て、カスパに向かうような無限測地線に対応する有理的測地カレントが存在するが、これはコンパクト双曲曲面の場合にはないものである。すなわち、カスパ付き双曲曲面の場合有理的測地カレントと呼ばれる存在が、閉測地線に限らないのであるが、研究の中で有理的測地カレントは閉測地線かあるいは上記の無限測地線のいずれかしかないという分類定理を得ることが出来た。

その後、これまでのコンパクトな場合の研究手法を適用することを考えたが、カスパの存在により、コンパクトな場合での議論がそのままでは適用できないことが多かった。ただし、カスパ付きの場合にカレントのよい性質が失われるのではなく、むしろ新しい異なる性質が存在することを見出すことができた。特に、無限測地線がある種の自然な閉測地線列の極限として現れることに注目した。この近似は直感的には正しいと思える主張であったが、測地カレントの議論のみでは難しく、実際の証明においては次のようなサブセットカレントの性質を活用した。基本群の異なる固定点を持つ放物型元 a, b に対して、部分群 $\langle a^n, b^n \rangle$ に対応するサブセットカレントを考えた際、 n を無限に発散させたとき、極限として無限測地線となる。この無限測地線の両端は a, b の固定点であり、 a^\wedge, b^\wedge と書かれるような点である。すなわち、 $\langle a^n, b^n \rangle$ の極限として、 $[a^\wedge, b^\wedge]$ という測地線が現れるため、極めて美しい収束であり、測地カレントのみの研究では得られない知見であった。ちなみに、上の例では二つの放物型元の場合を考えたが、放物型元を増やして k 個にした場合、収束先としては無限遠に頂点をもつ k 角形が得られることを示した(稠密性定理の証明の中でも基本的な役割を果たす)。これもまた、カスパ付き双曲曲面上のサブセットカレント独自の現象であり、美しい収束現象である。

稠密性定理の証明においては、上記の無限測地線の閉測地線による近似と次の近似が大きな役割を果たした。カスパ付き双曲曲面はカスパの近くを切り落とすことによって、境界付きコンパクト双曲曲面が得られる。この切り落とす部分を小さくすることによって、コンパクト双曲曲面によってカスパ付き双曲曲面を近似するのである。このような近似手法はカスパ付き双曲曲面を扱う際には一般的な手法ではあるが、稠密性定理の証明の中では切り落とす部分をどの程度小さくするかの評価が問題となり、極めて精密な不等式評価が必要であった。

以上は測地カレントの場合の研究手法を述べたが、サブセットカレントにもこの手法は応用することが出来た。測地カレントでは無限測地線を折れ線で近似するような方法であったのに対して、サブセットカレントでは無限測地線の束を折れ線の束で近似するような方法をとった。

4. 研究成果

カスパ付き双曲曲面上の測地カレント空間およびサブセットカレント空間において稠密性定理を示すことに成功した。また、上で述べたようなコンパクトな場合とは異なる収束現象を多く

見つけることが出来た。得られた収束現象を利用することで、閉測地線の交点数がカスプ付き双曲曲面上に連続拡張出来ないということも示した（コンパクトな場合には交点数は連続拡張されるため大きな違いと言える）。

以上をまとめた論文を著名な雑誌 *Groups, Geometry, and Dynamics* に投稿したところ 2022 年 2 月に査読のアクセプトを得ることが出来た。現在は出版準備中であり、正確な出版予定は未定である。また、得られた成果については国内外を問わず様々な研究集会に参加し本研究の成果を発表した。

以上から、当初の目的を完全に達成することが出来たと言える。本研究成果の今後としては、双曲曲面上の閉測地線の数え上げ問題への応用を期待している。閉測地線の数え上げ問題は Mirzakhani によって近年めざましく発展した分野であり、閉測地線の完備化である測地カレントが大きな役割を果たしている。本研究によって、カスプ付きの場合にカレントの理論が整備されたことで、数え上げ問題の研究におけるカレントを用いた議論もより明快になると思われる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Dounnu Sasaki	4. 巻 -
2. 論文標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Groups, Geometry, and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 カスプ付き双曲面上の測地カレントの稠密性問題
3. 学会等名 第63回函数論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property
3. 学会等名 年寄りセミナー2020（幾何学的群とその周辺）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property
3. 学会等名 「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 (アブストラクト公開のみ) カスプ付き双曲曲面上の測地カレントの稠密性問題
3. 学会等名 日本数学会2020年度会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Dounnu Sasaki
2. 発表標題 (Short communication) Subset currents on hyperbolic groups
3. 学会等名 Young Geometric Group Theory IX (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 自由群と曲面群上のサブセットカレント
3. 学会等名 早稲田幾何学的トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐々木東容
2. 発表標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Dounnu Sasaki
2. 発表標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property
3. 学会等名 Geometric Group Theory in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Dounnu Sasaki
2. 発表標題 Currents on cusped hyperbolic surfaces and denseness property
3. 学会等名 Beyond Hyperbolicity at the Ohio State University (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関