

令和 5 年 5 月 24 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14545

研究課題名（和文）コーナーに関連したある種の高次不変量の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of some higher-order topological invariants related to corners

研究代表者

林 晋（Hayashi, Shin）

東北大学・材料科学高等研究所・助教

研究者番号：70807833

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：離散四半面上の作用素（四半面Toeplitz作用素）の指数理論と物性物理学のトピックである高次トポロジカル絶縁体の接点の認識に基づき、四半面Toeplitz作用素の指数についてある種の高次不変量としての幾何学的位置付けを明らかにする研究を行った。結果として四半面Toeplitz作用素の指数公式を導出し、その背後にある幾何学的描像や解析性の役割を明らかにした。さらに高次トポロジカル絶縁体との接点を明確にするとともに応用のための基礎理論の整備を行った。これらを基に物性物理学の研究者と共同でいくつかの理論提案を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ある種の離散的な角と関連したトポロジーの背後にある幾何学的描像を明らかにし、特に解析性の役割を見出したことは、さらなる展開の手がかりとなる可能性がある。また、物性物理学のトピックである高次トポロジカル絶縁体と指数理論の関連を明確にするとともに、実際にいくつかの応用を行った。この意味で本研究は高次トポロジカル絶縁体のトポロジーを取り扱う理論基盤の開拓に向けた数学的取り組みとしての意義もある。

研究成果の概要（英文）：We conducted research to elucidate index theory for operators on a discrete quarter-plane (quarter-plane Toeplitz operators). Based on a well-expected relation between index theory for quarter-plane Toeplitz operators and higher-order topological insulators in condensed matter physics, we aimed to clarify the geometric viewpoint for indices of quarter-plane Toeplitz operators as some higher invariants. As a result, we derived an index formula that reveals the underlying geometric picture and the role of analyticity. Additionally, we found explicit contact with higher-order topological insulators and investigated foundational theories for quarter-plane Toeplitz operators for applications. We also conducted some theoretical proposals for the study of topological insulators in collaboration with condensed matter physicists.

研究分野：位相幾何学

キーワード：指数理論 K理論 四半面テーパーリッツ作用素 高次トポロジカル絶縁体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Atiyah--Singer 指数定理は位相不変量にひとつの統一的な視点を与えた。離散半直線上で定義される Toeplitz 作用素は指数理論の展開において重要な役割を果たしてきた基本的対象であり、例えばその族の指数は Atiyah--Singer 指数定理において主要な役割を果たす Bott 周期性定理の証明に用いられる。その自然な変種として、離散四半面上で定義される四半面 Toeplitz 作用素があり、その指数理論もまた展開されていた。一方で Toeplitz 作用素の指数理論と物性物理学のトピックであるトポロジカル絶縁体の接点が認識されるとともに、2016 年頃から物性物理学において高次トポロジカル絶縁体と呼ばれる対象が活発に研究され、系のトポロジーの役割等が様々に議論されていた。同時期に四半面 Toeplitz 作用素の指数理論を用い、四半面を角(コーナー)を持つ系のモデルと捉えることで、高次トポロジカル絶縁体研究に対し、その特徴量(位相不変量)に関する理論提案を行なったことが本研究の出発点である。

2. 研究の目的

高次トポロジカル絶縁体のセットアップにおいては、従来のトポロジカル絶縁体のトポロジーは基本的に自明となる。この意味で四半面 Toeplitz 作用素の指数に対し、ある種の高次不変量としての視点を持つことができる。この高次不変量としての視点について、特にその幾何学的位置付けを明らかにすることが本研究の大きな目標である。四半面 Toeplitz 作用素の指数理論について、特に高次トポロジカル絶縁体研究への応用に際しては、その理論展開が十分ではないとの認識に基づき、四半面 Toeplitz 作用素の族の指数公式の開拓、連続の空間の上への理論展開、応用のための基礎理論の整備、を研究目的と定め研究を開始した。

3. 研究の方法

指数理論としての問題意識に加え、物性物理学の視点を経由するとき、四半面 Toeplitz 作用素の指数理論についてさらに多様な理論展開が有り得ることが期待された。物性物理学の視点を導入することについてはトポロジカル絶縁体における一つの議論を指数理論の立場から整備する等の準備を行っていた。指数理論と物性物理学の視点の多様なアプローチから、四半面 Toeplitz 作用素の指数理論を、特に幾何的立場から展開することが本研究の手法である。実際、以下で述べる四半面 Toeplitz 作用素の指数公式の導出においては、指数理論の成果とともに物性物理学からの視点が(必ずしも直接的ではないにせよ)一つの鍵となっている。

4. 研究成果

- (1) Benalcazar--Bernevig--Hughes による高次トポロジカル絶縁体の重要なモデルの一つを本研究の立場から検討し、このモデルが高次トポロジカル絶縁体において特徴的なトポロジカル角状態を持つことのいまひとつの根拠を与えた。結果としてモデルが持つ角状態が既存の議論より強い頑強性を持つこと、角と関連したトポロジーが系の形状に依存することなどが明らかとなった。これにより指数理論と高次トポロジカル絶縁体の明確な接点が得られた。
- (2) これまで凸型の角に議論が限られていた四半面 Toeplitz 作用素の指数理論を凹型の角にまで展開し、凸型の角と凹型の角の指数の間にある関係式があることを証明した。これは上記の高次トポロジカル絶縁体との接点を通じた数値計算の結果から数学的結果を予想し、得られたものである。
- (3) 高次トポロジカル絶縁体の研究では主に点群対称性と呼ばれる有限群の対称性を保つ系が議論されているが、本研究の手法は点群対称性を特に要請することなく角状態を議論することができる。本研究の利点を活かした高次トポロジカル絶縁体研究への応用として、物性物理学の研究者と共同で、カイラル対称性で保たれた高次トポロジカル半金属相の理論提案を行なった(中西毅氏、奥川亮氏との共同研究)。
- (4) 四半面 Toeplitz 作用素と関連したある作用素環の KR 群とその間の準同型写像の計算を行い、四半面 Toeplitz 作用素の指数理論のある種の実構造を保つ場合にまで整備した。応用として Altland--Zirnbauer 10-fold way のそれぞれの対称性のクラスにまで本研究の理論を展開し、指数理論に基づくトポロジカル角状態の分類表を提出した。ここで得ら

れた表は物性物理学で知られている表と consistent であり、指数理論的な背景を与えたものと見ることができる。同時に K 理論の積構造を用いて具体例の構成法を整備した。

- (5) 四半面 Toeplitz 作用素の Fredholm 指数を幾何的に表示する指数公式を導出した。具体的には Gohberg-Krein による行列分解の手法とある種の解析接続を用いることで、二次元トーラス上の行列値関数として与えられる四半面 Toeplitz 作用素の表象がある種の三次元球面上に可逆な行列の連続族として標準的に拡張することを確認し、拡張の三次元回転数が Fredholm 指数に一致することを証明した。これにより四半面 Toeplitz 作用素の指数の背後にある幾何的描像がより明確になるとともに角と正則性の関連について一つの明示的な例を得た。さらに K 理論を用いることで、この議論を族の指数やある種の実構造を保つ場合にまで拡張した。

- (6) 研究開始当初の問題意識に対し、高次トポロジカル絶縁体研究との接点をより明確にすることで、そこから得られたアイデアや視点を加えて研究を遂行することを予定していた。研究開始と前後して物性物理学において高次トポロジカル絶縁体の理論研究が非常に活発に進展したことから、本研究では当初の想定以上に基礎理論の整備に注力した面がある。一方で本研究を通して物性物理学で解明された物事を四半面 Toeplitz 作用素の指数と関連した議論として受け取ることができるようになってきた。当初の想定以上の理論展開が見えつつあり、そのための準備を行ったことは本研究の成果の一つと捉えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hayashi Shin	4. 巻 400
2. 論文標題 An Index Theorem for Quarter-Plane Toeplitz Operators via Extended Symbols and Gapped Invariants Related to Corner States	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 429 ~ 462
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04600-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hayashi Shin	4. 巻 111
2. 論文標題 Classification of topological invariants related to corner states	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-021-01460-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nagasato Yuki, Takane Yositate, Yoshimura Yukinori, Hayashi Shin, Nakanishi Takeshi	4. 巻 90
2. 論文標題 Gapless States Localized along a Staircase Edge in Second-Order Topological Insulators	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 104703 ~ 104703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.90.104703	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hayashi Shin	4. 巻 109
2. 論文標題 Toeplitz operators on concave corners and topologically protected corner states	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2223 ~ 2254
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-019-01184-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okugawa Ryo, Hayashi Shin, Nakanishi Takeshi	4. 巻 100
2. 論文標題 Second-order topological phases protected by chiral symmetry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 205302
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.100.235302	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 Index theory for quarter-plane Toeplitz operators and topological corner states
3. 学会等名 Japan-Netherlands Joint Seminar: Index Theory and Operator Algebras in Topological Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 Index theory for quarter-plane Toeplitz operators and topological corner states
3. 学会等名 東北大学材料科学高等研究所, 数学連携グループセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 林晋
2. 発表標題 An index theorem for quarter-plane Toeplitz operators via extended symbols
3. 学会等名 日本数学会 2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 林晋
2. 発表標題 トポロジカルな角状態への指数理論的アプローチ
3. 学会等名 応用数理学会 2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 Topological invariants related to corner states via index theory and matrix factorizations
3. 学会等名 CREST Research Seminar on Theoretical studies of topological phases of matter (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 On a topological invariant related to corner states via index theory and matrix factorizations
3. 学会等名 Variety and universality of bulk-edge correspondence in topological phases: From solid-state physics to transdisciplinary concepts (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 Classification of topological invariants related to corner states
3. 学会等名 日本数学会 2021年度会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin Hayashi
2. 発表標題 Topological invariants and corner states for Hamiltonians on a lattice
3. 学会等名 第27回大阪市立大学国際学術シンポジウム 可視化の数理と対称性およびモジュライの深化 (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin HAYASHI
2. 発表標題 Topological invariants and corner states
3. 学会等名 Topological phases of interacting quantum systems (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Topological invariants and corner states for Hamiltonians on a lattice
3. 学会等名 新学術領域「次世代物質探索のための離散幾何学」研究成果発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Topological invariants and corner states for Hamiltonians on a lattice
3. 学会等名 第6回トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Topological K-theory and the bulk-edge correspondence
3. 学会等名 Young mathematicians workshop on algebraic, geometric, and analytic aspects of K-theory and vector bundles (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 ある種の角に対するテープリッツ作用素の指数理論とその応用
3. 学会等名 第66回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 (高次)トポロジカル絶縁体におけるトポロジーについて
3. 学会等名 関西ゲージ理論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Topological invariants and corner states for Hamiltonians on a lattice
3. 学会等名 第13回物性科学領域横断研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Topological invariants and corner states for Hamiltonians on a lattice
3. 学会等名 首都大学東京・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 Toeplitz作用素の指数理論と(高次)トポロジカル絶縁体のトポロジーについて
3. 学会等名 神戸幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 林 晋
2. 発表標題 A mathematical approach to higher-order topological insulators
3. 学会等名 トポロジカル表面状態、ソリトンとブレン、指数定理
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------