

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14546

研究課題名（和文）非可換確率論，確率論，単葉関数論の対応関係

研究課題名（英文）Correspondence between non-commutative probability, probability and univalent function theories

研究代表者

長谷部 高広（Hasebe, Takahiro）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：00633166

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では単調独立性の応用範囲をさらに広げることに成功した。既知だった Loewner chain とユニタリ単調加法過程の対応関係に加えて、単位円周上の加法過程との対応関係を新たに構成したことにより、確率過程との関わりが広がった。この研究に動機づけられて、人口変化等の確率モデルである分枝過程について考察し、その背後に Loewner chain の構造があることを発見した。これにより分枝過程の期待値や絶滅確率を複素関数論の観点から解析するという新しい方法を導入した。また、巡回的単調独立性と自由独立性を組み合わせて、摂動を含むランダム行列を包括的に扱う枠組みを提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は確率過程，非可換確率過程，複素関数論，ランダム行列といった分野を横断する研究である。本研究の成果としてこれらの分野どうしに新たな結びつきが生まれ、分野どうしが互いに交流を深めるという学術的な意義があった。特に、ランダム行列は幅広く科学に应用されている。自由確率論はランダム行列を解析する一つの大きな手法になっており、応用先として既に量子情報理論や深層学習理論がある。本研究では摂動を含むようなランダム行列の扱いに対する基本的な枠組みを提案しており、将来的にランダム行列のさらなる応用を目指していく上で参考になったり役に立ちうると考えている。

研究成果の概要（英文）：This research succeeded in enlarging the application of monotone independence to other fields. In addition to a known correspondence between Loewner chains and unitary monotone additive processes, we also constructed a correspondence to additive processes on the unit circle. Motivated by this work, we discovered a Loewner chain structure in branching processes that are known as a stochastic model for the population change. Consequently, we obtained a new method based on complex analysis to analyze the expectation and extinction probability of branching processes. Combining cyclic-monotone independence and free independence, we introduced a framework that allows us to treat random matrices with perturbation.

研究分野：非可換確率論

キーワード：単調独立性 分枝過程 ランダム行列 マルコフ過程 加法過程 Loewner chain 自由確率論

1. 研究開始当初の背景

1980年代に Voiculescu は自由群の生成元に付随する作用素たちが満たす性質を確率論的な視点から抽象化し「自由独立性」概念を定義し、「自由確率論」という分野を創始した。その後、自由独立性の他にも「独立性」と呼べるものはあるのかと探究が始まり、基本的な例として、2000年ごろに村木が「単調独立性」を見出した。各「独立性」ごとに、確率論的な角度からさまざまな問題が考察されている。例えば、大数の法則、中心極限定理、確率分布の畳み込みなどが定式化されている。最後の確率分布の畳み込みは独立な二つの確率変数の和の分布として得られ、独立性に応じて、自由畳み込み、単調畳み込みなどと呼ばれる。単調畳み込みは Stieltjes 変換の逆数の合成によって特徴付けられるため、複素関数論と密接に繋がっている。特に、単射な解析関数(単葉関数と呼ばれる)が様々な場面で現れることが分かっており、Franz, Hasebe, Schleissinger (2020) において単葉関数と自由畳み込み、単調畳み込みとの関係が研究された。同論文では、特に、単調独立な増分を持つ非可換確率過程である「単調加法過程」、ある種の単葉関数の1パラメータ族である「Loewner chain」、ある種の「マルコフ過程」の三者間に対応関係があることが見出された。

Loewner chain は複素関数論の基本的な手法として知られており、有名な応用例としては de Branges による Bieberbach 予想の解決(1985年)、そしてパーコレーション等の物理モデルにおける臨界現象を解明するために2000年ごろに導入された SLE (Schramm-Loewner evolution) がある。SLE の登場によって Loewner chain の研究が活発になり、複素関数論、確率論や物理学において研究が続けられてきている。

マルコフ過程は古くから確率論で中心的な研究対象であり、多様な例と応用がある分野である。関数解析的な観点からはマルコフ過程の一般論が緻密に展開されている。マルコフ過程に対しては、確率解析、確率微分方程式といった「微積分」の手法が伊藤清らによって確立されている。

ランダム行列は近年ますます理論・応用ともに研究が増えてきている活発な分野である。1991年に Voiculescu によって自由確率論がランダム行列に応用できることが発見されて以来、様々な応用が増えてきた。例えば、自由確率論の応用は、ランダム行列を介して、作用素環論、量子情報理論や深層学習理論へ広がってきている。

2. 研究の目的

非可換確率論の視点からマルコフ過程、複素関数論、ランダム行列、SLE 等の他分野に新しい解析手法や研究の方向性を提供したり、様々な接点を探るのが本研究の目的である。既に、ある種のマルコフ過程、Loewner chain、非可換確率過程の間に対応関係があるので、この対応関係をさらに進展させたい。ランダム行列については既に自由確率論を用いた応用が知られているが、新しい観点からの応用を目指す。特に、単調独立性がランダム行列において果たす役割についての研究は本研究開始時点では非常に少なかったため、その方向性をさらに切り開いていく。SLE と非可換確率論は共通の Loewner chain を用いる点で関連があるので、そこを起点としてさらに関連を広げていきたい。

3. 研究の方法

非可換確率論の専門家との議論はもとより、国内外の複素関数論の専門家、確率過程の専門家、SLE の専門家、ランダム行列の専門家と議論しながら研究を進めていった。本研究を進めていく途中で時間的に一様ではないマルコフ過程が重要になってきた。しかし文献にあたってみても、時間的に一様でない場合の理論はそれほど整備されていないようであった。他にも基本的に思われる問題が過去にきちんと研究されていないといったことがあったので、文献を精査し考察するために多くの時間をかけた。時には確率過程の専門家に対してセミナー発表を行って意見を伺った。

4. 研究成果

まず得られた研究成果の概要を項目に分けて述べる。その後で国内外における研究の位置付けやインパクト、今後の展望をまとめて述べる。

(1) Franz, Hasebe, Schleissinger(2020)において単調加法過程、あるクラスの Loewner chain、

あるクラスのマルコフ過程の間に全単射対応が構成された。この対応は実数値マルコフ過程と単位円周値マルコフ過程の2つの場合それぞれにおいて確立されている。単位円周の場合に限って、さらに古典的な加法過程との間にも全単射対応を構成することができた(堀田一敬との共同研究)。我々の設定では Loewner chain が時間パラメータについて連続関数ではない。従って微分ができない場合もあり、従来の Loewner 微分方程式では不十分であった。そこで、より一般の概念として「Loewner 積分微分方程式」を定式化することによって、うまく Loewner chain の generator 概念を定義した。この generator と加法過程に対する Levy-Khintchine 表現を比較することで、両者の間に自然な全単射を構成することができた。この応用例として、Loewner chain の広義一様収束を特徴づけることができた。

- (2) 確率測度の単峰性という性質がある。これは大まかにいうと確率密度関数がただ一つの点において極大値を取るという性質である。より正確には、そのような確率分布の弱収束極限で表されるものも単峰と呼ぶ。本研究では、確率分布の積演算を考える場合には、単峰性を修正した概念が自然であるという結論に至り、修正された概念の定義を与えた。さらに古典確率論と自由確率論の文脈それぞれにおいて、修正された単峰性の解析を行った(植田優基, J.-C. Wang との共同研究)。
- (3) 回転不変なランダム行列の主小行列の固有値解析を行った(藤江克徳との共同研究)。この研究においては、証明がはっきりとは文献に書かれていないがまず正しいだろうと専門家が考えていた定理(folklore theorem)に対して自由確率論を用いた証明を与えることに成功した。
- (4) Collins, Hasebe, Sakuma(2018)において固有値が集積点を持たないような大きなランダム行列の解析のために巡回的単調独立性という概念が定式化された。本研究ではまず巡回的単調独立性をランダム行列ではなく、ある種の大きなグラフの隣接行列の固有値解析に応用できることを見出した(Octavio Arizmendi, Franz Lehner との共同研究)。さらに、摂動つきのランダム行列を扱う包括的な枠組みとして、巡回的単調独立性と自由独立性の両方を取り込んだ「B'型自由確率論」を提案した(藤江克徳との共同研究)。この枠組みの応用として、既上記(3)において調べていた回転不変なランダム行列の主小行列に対する新しいアプローチを得た。関連して、固有値が離散になるようなランダム行列モデルに対して詳細な固有値揺らぎを計算することに成功した(Benoit Collins, 藤江克徳, Felix Leid, 佐久間紀佳との共同研究)。
- (5) ここ15年間ほど、ランダム行列を利用した量子チャンネルのモデルが様々に提案され解析されている。本研究では新しいクラスのランダム量子チャンネルを構成し、それを利用して、最小出力エントロピーの加法性の破れを示した(福田素久, 佐藤晋也との共同研究)。
- (6) 人口密度などの時間発展モデルである(連続/離散状態の)分枝過程と呼ばれる確率過程を複素関数論的な手法により解析を行った(Pavel Gumenyuk, Jose Luis Perez との共同研究)。具体的には、Loewner chain を分枝過程に応用するという手法により、絶滅確率や爆発確率といった基本的な確率を解析した。文献を探した限り、分枝過程に対して複素関数論を本格的に利用した先行研究は離散状態のモデルではわずかにあるものの、連続状態のモデルでは見当たらなかったのが、かなり新しい手法と言える。論文は複素関数論の部分と確率過程の部分に分けて執筆した。前者は既に open access で掲載されており、後者は現在投稿中である。
- (7) 2013年ごろから2次元以上のベクトル値非可換確率変数に対する独立性が色々と提案されるようになった。本研究ではさらに新しい独立性概念の提案を行い、また部分的に独立性概念の分類も行なった(Malte Gerhold, Michael Ulrich との共同研究)。加えて2次元における自由畳み込み(bi-free convolution)に関する解析を行った(H.-W. Huang との共同研究, 論文アクセプト済み)。
- (8) 正規分布の free Levy measure の漸近挙動を得た(植田優基との共同研究)。正規分布は確率論において基本的な分布であることは周知の事実であるが、自由確率論においてはさほど注目すべき役割を担っていない。それにも関わらず、正規分布は自由無限分解可能であったり、より強く自由自己分解可能といった、自由確率論的に興味深い性質を持っている。本研究によってこれらの性質の詳細が分かった。
- (9) 自由独立性、単調独立性に加えてもう一つ基本的な独立性として「ブール独立性」がある。本研究ではブール畳み込みに関する確率分布の「自己分解可能性」を解析した(野場啓, 植田優基, 佐久間紀佳との共同研究)。主な結果として、ブール自己分解可能分布のルベーグ

分解において特異連続部分が存在しないこと, atom の数は高々2 であることがある . 加えて, 平均 0 の正規分布はブール自己分解可能になり, 平均がある程度 0 から離れるとブール自己分解可能ではないことを示した .

[国内外における位置付けとインパクト] 現在ではランダム行列は多くの分野に応用されている . これまで非可換確率論は主として自由独立性をランダム行列に応用することを通じて, 物理学や深層学習理論といった分野に応用を見出してきた . このため, 非可換確率論の分野ではランダム行列の研究が大きなウエイトを占めている . 他方で, 自由独立性以外にも様々な独立性が理論的に研究されてきた . しかし応用という面では, 自由独立性に比べると他の独立性の応用はまだまだ少ないと言わざるを得ない . そういった状況の中で本研究が進められた .

本研究成果は種々の独立性の解析, ランダム行列の解析など多岐にわたる . その中で特にインパクトが大きいのは, 専門家の反応などを踏まえると, **単調独立性の応用を広げた点**だと考えている . 具体的には, Loewner 理論との関連で複素関数論に関する新しい知見が得られ, 進行中の研究も含めると 4 名の複素関数論の専門家と共同研究が行われている / 行われた (上記(1) を含む) . さらにそこで得られた知見や手法を分枝過程の研究に応用することで, 間接的ではあるものの, 単調独立性を確率過程の研究に応用することができた (上記(6)) . 他方で, 単調独立性に密接に関わる巡回的単調独立性のランダム行列への応用を得ることができた (上記(4)) . 近年は他の研究者グループも (巡回的) 単調独立性のランダム行列への応用について結果を出していることを考えると, この話題は今後も進展して行くものと考えている .

[今後の展望と課題] 非可換確率論の他分野への応用を増やしていくことが大きな目標である . まず, 本研究成果よりも直接的に単調独立性と分枝過程を関連づけられないかを検討していきたい . また本研究で扱った分枝過程は 1 次元の最も単純なモデルに限っていた . 一方で, 確率論では, 高次元のモデル, 空間的移動を伴うモデル, 外部の系との相互作用を含むモデルなど, 様々な拡張された分枝過程が考案されている . こういった拡張モデルに対しても複素関数論の手法が適用できるかどうかは検討の余地がある .

高次元独立性に関しては非可換確率論として理論的に大きな進展を得た (上記(7)) . 新しい独立性の例も見つかっている . 非可換確率論の既存の手法を拡張すれば, 色々な側面からこれらの独立性を解析できると考えている . 一方で, 高次元独立性の応用は非常に少ない . 今後の大切な課題は, 例えば作用素環論やランダム行列など別の分野に役立つ応用を見つけていくことである .

本研究では SLE への応用も目指していた . これまで専門家と議論するなど検討を進めたものの, SLE に関する具体的な結果までは得られなかった . これも今後の課題である . 本研究で Loewner chain に関して得られた結果が役に立つ可能性はあると考えている .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件／うち国際共著 6件／うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Takahiro Hasebe, Yuki Ueda and Jiun-Chau Wang	4. 巻 169
2. 論文標題 Log-unimodality for free positive multiplicative Brownian motion	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Colloquium Mathematicum	6. 最初と最後の頁 209 ~ 226
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/cm8413-6-2021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takahiro Hasebe and Ikkei Hotta	4. 巻 2022
2. 論文標題 Additive Processes on the Unit Circle and Loewner Chains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 17797 ~ 17848
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnab157	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Malte Gerhold, Takahiro Hasebe and Michael Ulrich	4. 巻 285
2. 論文標題 Towards a classification of multi-faced independence: A representation-theoretic approach	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 109907
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2023.109907	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takahiro Hasebe and Yuki Ueda	4. 巻 149
2. 論文標題 Homomorphisms relative to additive convolutions and max-convolutions: Free, boolean and classical cases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4799 ~ 4814
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15595	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsunori Fujie and Takahiro Hasebe	4. 巻 19
2. 論文標題 The Spectra of Principal Submatrices in Rotationally Invariant Hermitian Random Matrices and the Markov-Krein Correspondence	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics	6. 最初と最後の頁 109 ~ 109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.30757/ALEA.v19-05	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Motohisa Fukuda, Takahiro Hasebe and Shinya Sato	4. 巻 11
2. 論文標題 Additivity violation of quantum channels via strong convergence to semi-circular and circular elements	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Random Matrices: Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S2010326322500125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Hasebe and Yuki Ueda	4. 巻 85
2. 論文標題 Unimodality for free multiplicative convolution with free normal distributions on the unit circle,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Operator Theory	6. 最初と最後の頁 21 ~ 43
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7900/jot.2019mar23.2264	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Uwe Franz, Takahiro Hasebe and Sebastian Schleiinger	4. 巻 552
2. 論文標題 Monotone increment processes, classical Markov processes, and Loewner chains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Dissertationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1 ~ 119
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/dm808-1-2020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Pavel Gumenyuk, Takahiro Hasebe and Jose-Luis Perez	4. 巻 -
2. 論文標題 Loewner Theory for Bernstein Functions I: Evolution Families and Differential Equations	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Constructive Approximation	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00365-023-09675-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahiro Hasebe and Franz Lehner	4. 巻 28
2. 論文標題 Cumulants, spreadability and the Campbell-Baker-Hausdorff series	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Documenta Mathematica	6. 最初と最後の頁 515 ~ 601
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/DM/923	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahiro Hasebe and Yuki Ueda	4. 巻 28
2. 論文標題 On the free Levy measure of the normal distribution	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/23-EJP1035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Octavio Arizmendi, Takahiro Hasebe and Franz Lehner	4. 巻 6
2. 論文標題 Cyclic independence: Boolean and monotone	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1697 ~ 1734
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahiro Hasebe, Kei Noba, Noriyoshi Sakuma and Yuki Ueda	4. 巻 274
2. 論文標題 On Boolean selfdecomposable distributions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 129 ~ 151
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm221227-29-10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計25件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Free probability of type B prime
3. 学会等名 Quantum Information Theory and Free Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Generators of monotone convolution hemigroups on the unit circle
3. 学会等名 Noncommutative Analysis on Groups and Quantum Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Classification of universal lifts of operators to tensor product and free product Hilbert spaces
3. 学会等名 Kyoto Operator Algebra Seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Cyclic monotone independence: random matrix models and operator models
3. 学会等名 Seminario Interinstitucional de Matrices Aleatorias SIMA 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Loewner Theory and branching processes
3. 学会等名 Coloquio CIMAT-DEMAT (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Locally uniform weak convergence with application to additive processes
3. 学会等名 Seminario de probabilidad, CIMAT (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Eigenvalues of the principal submatrix of a random matrix
3. 学会等名 RIMS研究集会「可積分系数理における最近の展開」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Principal submatrices of unitarily invariant hermitian random matrices
3. 学会等名 Random Matrices and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Multi-faced independences arising from ``universal lifts'' of operators
3. 学会等名 Mexico-Japan Probability Seminar (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Proving free infinite divisibility of probability measures with explicit densities
3. 学会等名 Seminario Interinstitucional de Matrices Aleatorias SIMA 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Loewner chains, Markov processes and non-commutative stochastic processes
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 Time-inhomogeneous branching processes and Loewner chains
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 T. Hasebe
2. 発表標題 The eigenvalues of principal submatrices in rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov-Krein Correspondence
3. 学会等名 Functional Analysis Seminar (University of California, San Diego) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Spectra of principal minors of random matrices invariant by unitary conjugacy
3. 学会等名 東大京大合同オンライン作用素環セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Towards a classification of multi-faced independences
3. 学会等名 Workshop on "Non-commutative Probability and Related Fields 2021" (hybrid, Nagoya University)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Loewner chains, Markov processes and non-commutative stochastic processes
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長谷部高広
2. 発表標題 Additive processes on the unit circle and Loewner chains
3. 学会等名 Levy Seminar
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Additive processes on the unit circle and Loewner chains
3. 学会等名 Workshop on " Non-commutative Probability and Related Fields "
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Limit theorems for multiplicative convolutions in classical and bi-free probabilities
3. 学会等名 UC Berkeley Probabilistic Operator Algebra Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Monotone increment processes, Markov processes and Loewner chains
3. 学会等名 The 14th SNU-HU Symposium on Mathematics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Noncommutative probability and Loewner chains
3. 学会等名 函数論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains
3. 学会等名 RIMS研究集会「量子場の数理とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takahiro Hasebe
2. 発表標題 The spectra of principal submatrices of rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov-Krein correspondence
3. 学会等名 Strukturtheorie-Seminar (Webex meeting, Graz University of Technology) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Politecnico di Milano			
メキシコ	CIMAT			
オーストリア	Graz University of Technology			
ドイツ	University of Greifswald			
フランス	Universite de Bourgogne-Franche-Comte			

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	Warsaw University of Technology	Wroclaw University		
デンマーク	Aarhus University			
ノルウェー	University of Stavanger	NTNU		
中国	National Sun Yat-sen University	National Tsing Hua University		
カナダ	University of Saskatchewan			