

令和 6 年 6 月 16 日現在

機関番号：14303

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14551

研究課題名（和文）代数体に由来する種々の作用素環の研究

研究課題名（英文）Investigation of operator algebras associated to number fields

研究代表者

武石 拓也 (Takeishi, Takuya)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・准教授

研究者番号：20784490

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：私は作用素環論を専門としており、代数体から構成される $C^*$ -環について研究している。そのような $C^*$ -環のうち、Bost-Connes  $C^*$ -環は元の代数体の情報を完全に覚えていることが以前の研究で分かっていた。本研究では、Arledge-Laca-Raeburnの定義した $C^*$ -環についても、元の代数体の情報を完全に覚えていることを証明した。また、Bost-Connes系の場合にゼータ関数が分配関数として取り出せるということが知られているが、代数体の半群 $C^*$ -環の場合にはゼータ関数が分配関数の「和」として取り出せるということを示した。この2編の主要論文のほか、関連した論文が3編ある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学では対象が本質的に同じであるかそうでないかを区別する「同型」という概念がある。簡単な対象であれば同型かどうかは一目でわかることも多いが、私の専門とする作用素環論では無限次元の対象を扱うので、全く違うように見えるものが超越的な理由によって「同じ」になってしまうことが多々ある。そのため、「作用素環の同型・非同型」の決定は伝統的に重要な問題として扱われている。本研究はその一端として、代数体から作られるArledge-Laca-Raeburnの $C^*$ -環というクラスの $C^*$ -環がすべて「異なる」ということを示した。

研究成果の概要（英文）：I'm operator algebraist, working on  $C^*$ -algebras from number fields. Bost-Connes  $C^*$ -algebras are ones of such  $C^*$ -algebras, and from my previous research, we know that Bost-Connes  $C^*$ -algebras completely remembers the underlying number fields. In this research, we proved that the  $C^*$ -algebras of Arledge-Laca-Raeburn have the same phenomenon. In addition, it is known that Dedekind zeta functions appear as partition functions of Bost-Connes systems. Analogously,  $ax+b$  semigroup  $C^*$ -algebras from number fields have the zeta function as a "summation" of partition functions. There are three other articles related to those two main articles.

研究分野：作用素環論

キーワード： $C^*$ -環論 代数体 K-理論 KMS状態 亜群 $C^*$ -環

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

私は作用素環論を専門としており、代数体から構成される  $C^*$ -環について継続的に研究している。研究開始時点では、そのような  $C^*$ -環としては Bost-Connes  $C^*$ -環と半群  $C^*$ -環の 2 種類があった。作用素環論として興味深い問題は、代数体から構成された  $C^*$ -環がもとの代数体の情報をどれくらい覚えているかという問題であり、これまでの研究から、Bost-Connes  $C^*$ -環は元の代数体の情報を完全に覚えていて、 $K$ -理論を通じて代数体の完全不変量が得られるということが分かっていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は 2 つに大別される。

(1) 代数体から構成される  $C^*$ -環について、重要な問題がいくつかあり、Bost-Connes  $C^*$ -環の関手性、関数体の場合の完全分類、などが挙げられる。それらに取り組んで結果を出すことが本研究の目的であった。そのうち、本研究で解くことに成功した問題は、Bost-Connes  $C^*$ -環の再構成の技法を他の種類の  $C^*$ -環に適用し、完全分類の結果を得ることである。

(2) 周辺の問題として、KMS 状態の情報から分配関数を通じて  $C^*$ -力学系の性質を取り出す研究を行った。代数体から作られる半群  $C^*$ -環の場合から出発し、後にグラフ  $C^*$ -環についても KMS 状態から分かる情報について調べた。

### 3. 研究の方法

(1) 本研究で着目した  $C^*$ -環は、Ariège-Laca-Raeburn (ALR) の  $C^*$ -環である。この  $C^*$ -環の歴史は古く、Bost-Connes の論文が出て間もなくのころに、当時は有理数体に対してのみ定義されていた Bost-Connes  $C^*$ -環を代数体に一般化するための候補となっていたが、KMS 状態の振る舞いが所望のものでなかったために一度廃れたものであった。しかしながら、(1)の研究では  $K$ -理論からの復元という観点から  $C^*$ -環を調べているため、KMS 状態の振る舞いを気にしないのであれば、ALR の  $C^*$ -環は Bost-Connes  $C^*$ -環のより自然な一般化になっているため、分類の観点から再検討する分には面白い数学的対象であった。

(2) I 型 KMS 状態があると、GNS 表現を通じてハミルトニアンを取り出すことで分配関数が定義できるということは Bost-Connes の最初の研究から認識されていたが、確立した一般論は無く、 $C^*$ -力学系に付随する様々な関数が漠然と「分配関数」と呼ばれている、という現状を以前の研究で Laca のもとを訪問した際に知った。そこでまずは、I 型 KMS 状態の系列から定まる分配関数を定義するところから始め、分配関数が  $C^*$ -力学系の不変量であることを確認したのち、代数体の半群  $C^*$ -環の場合とグラフ環の場合に分配関数について調べた。

### 4. 研究成果

(1)に関して 2 本、(2)に関して 3 本の論文を発表しており、1 本は投稿中であるが、残り 4 本は受理されたか出版済みの状態になっている。そのうち主要なものは、これから述べる Comm. Math. Phys. から出版された 2 つの論文である。

(1) 結論としては、ALR の  $C^*$ -環も元の代数体の情報を完全に覚えていることが明らかになった。技法としては以前の Bost-Connes  $C^*$ -環の場合がベースであるが、細部をかなり変える必要があった。Bost-Connes  $C^*$ -環は群接合積の full corner として書くことができるが、作用している群は代数体のイデアル群であり、自然な基底を持つ自由アーベル群である。一方で ALR の  $C^*$ -環の場合、代数体の乗法群による群接合積となっており、ねじれ部分群が自明でもなければ、自由アーベル群のパートにも自然な基底は無い。この違いが、Bost-Connes の場合の技法を適用するうえで最大の困難であった。逆に言えば、Bost-Connes  $C^*$ -環の場合の証明技法は、このような些細な違いでも気にしなければならぬほどに Bost-Connes の場合に特化したものであり、他の  $C^*$ -環に適用するハードルは非常に高い。しかしながら、ALR の場合にこの困難を回避する手段を見つけて、完全分類の証明を完成させることができた Bost-Connes のようなタイプの  $C^*$ -環の基本構成パーツを composition factor と我々は呼んでいるが、Bost-Connes の場合はすべてのレベルの composition factor を見なければ代数体が復元できないのに対して、ALR の場合は 4 次までの composition factor から代数体が復元できるという、興味深い違いがあることが結果的に分かった。この結果は 2024 年に Comm. Math. Phys. からオープンアクセス論文として出版済みである。

ALR  $C^*$ -環は代数体の有限アデール環への作用から  $C^*$ -環を作るが、全アデール環に変えた場

合にも同様の定理が成り立つことも示し、論文にまとめた（この論文は投稿中である）。この結果自体は有限アデルの場合に帰着するものであり、有限素点と無限素点を  $K$ -理論的に区別できることを示せば証明が完了するので、それほど驚くべきことではない。この論文の面白い点はこの結果自体というよりも、実素点と複素素点を  $K$ -理論的に区別できるという副次的な結果である。

また、この分類結果から、topological full group を通じて代数体の完全不変量であるような離散群が得られる。この離散群の研究を最終年度は行い、論文にできるだけ研究成果は得たが、論文の完成には至らなかったため今後の研究課題として残った。

(2) Bost-Connes  $C^*$ -環の場合は分配関数としてデデキント・ゼータ関数が現れることが分かっていたが、代数体の半群  $C^*$ -環の場合について分配関数に関する一般論が無かった。そこで、I 型 KMS 状態の系列から定まる分配関数を定義して、半群  $C^*$ -環の場合は部分ゼータ関数が現れるということを示した。ここまでは、Cuntz-Deninger-Laca の研究の時点でなんとなく認識されていたことを厳密化したというものである。併せて、KMS 状態の型もすべて決定し、II 型の KMS 状態が現れることも発見した。分配関数として現れる部分ゼータ関数を「すべて足す」とデデキント・ゼータ関数が現れるのであるが、部分ゼータ関数は分配関数としては無限個ずつ現れているので、「すべて足す」ということの意味を厳密にする必要がある。ここがこの研究で最も困難で面白い部分であった。最終的に、代数的整数論の興味深い補題を 1 つ証明することにより、この問題を解決した。結論としては、半群  $C^*$ -環の場合もデデキント・ゼータ関数が「関数の形で」 $C^*$ -力学系の不変量として取り出せることが分かった。この結果は 2021 年に Comm. Math. Phys. から出版された。

さらに、亜群とコサイクルから作られる  $C^*$ -力学系の分配関数に関する一般論を整備し、グラフ・テプリーツ環の場合に分配関数として道の数の母関数が現れることを示した。グラフ環については色々調べた結果を 1 つの論文として出したが、KMS 状態の型の決定がされていない部分があったので、型の決定を行った。この結果は J. Operator Theory に採録決定されている。

有限グラフ環の場合、I 型 KMS 状態は頂点と対応し、III 型 KMS 状態は極小な連結成分と対応するが、それ以外の連結成分の役割が認識されていないことに上記の研究の過程で気づいた。結論として、厳密な主張は非常に複雑であるが、概要は次のとおりである。I 型 KMS 状態の極限を取ると、III 型 KMS 状態の凸結合になる。この凸結合に現れる III 型 KMS 状態に、対応する頂点から極小連結成分までの間の（極小でない）連結成分の配置が関係している。この結果は J. Operator Theory から出版済みである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 C. Bruce and T. Takeishi	4. 巻 to appear
2. 論文標題 C*-dynamical invariants and Toeplitz algebras of graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Takeishi	4. 巻 90
2. 論文標題 Limits of KMS states on Toeplitz algebras of finite graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Operator Theory	6. 最初と最後の頁 545 ~ 568
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bruce Chris, Laca Marcelo, Takeishi Takuya	4. 巻 382
2. 論文標題 Partition Functions as C*-Dynamical Invariants and Actions of Congruence Monoids	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1165 ~ 1203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-020-03859-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kubota Yosuke, Takeishi Takuya	4. 巻 366
2. 論文標題 Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107070 ~ 107070
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2020.107070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bruce Chris、Takeishi Takuya	4. 巻 405
2. 論文標題 Constructing Number Field Isomorphisms from *-Isomorphisms of Certain Crossed Product C*-Algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-023-04927-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 C.Bruce, 武石拓也
2. 発表標題 Constructing number field isomorphisms from *-isomorphisms of certain crossed product C*-algebras
3. 学会等名 2022年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Rigidity theorems of certain classes of C*-algebras from number theory I-III (3回連続講演)
3. 学会等名 作用素環論における群作用と数理論理の関連 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Rigidity theorems of C*-algebras arising from number theory
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XIV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 KMS states of Toeplitz algebras of graphs
3. 学会等名 第60回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Operator Algebras and Number Theory, Conference of Functional Analysis
3. 学会等名 関数解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Partition functions as $C^*$ -dynamical invariants and actions of congruence monoids
3. 学会等名 CMS Winter Meeting 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Partition functions as $C^*$ -dynamical invariants and actions of congruence monoids
3. 学会等名 作用素環と量子力学系(RIMS) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 武石拓也, C. Bruce, M. Laca
2. 発表標題 Partition functions as $C^*$ -dynamical invariants and actions of congruence monoids
3. 学会等名 日本数学会年会2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Partition functions as $C^*$ -dynamical invariants and actions of congruence monoids
3. 学会等名 作用素環の分類理論における新展開(RIMS) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 Reconstructing the Bost-Connes semigroup actions from K-theory
3. 学会等名 Young mathematicians workshop on algebraic, geometric, and analytic aspects of K theory and vector bundles (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 武石拓也
2. 発表標題 代数体から構成される $C^*$ -環と関連する代数体の完全不変量について
3. 学会等名 日本数学会年会2024 (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

武石拓也のWebサイト  
<http://www.cis.kit.ac.jp/~takeishi/>  
投稿中のプレプリント  
<https://arxiv.org/abs/2209.10857>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------