

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 8 月 30 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2021

課題番号：19K14553

研究課題名(和文)ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論

研究課題名(英文)Spectral theory of Neumann--Poincare operators

研究代表者

宮西 吉久 (Miyanishi, Yoshihisa)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：20740236

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれる線形作用素のスペクトル(固有値と呼ばれるものを含む)の精緻な挙動は、偏微分方程式や物理現象に深く関連していることが分かっている。本研究では、様々な偏微分方程式に対応するノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の挙動を明らかにした。これらの結果は、偏微分方程式や物理現象に応用され、大規模な数値計算も行なったうえで、コンピュータグラフィックも用いて、目に分かる形で研究成果を提示することにも成功した。理論の一般化に繋がる結果を得ることもできている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

線形作用素のスペクトル(固有値と呼ばれるものを含む)は、様々な方程式や物理現象に深くかかわっている。積分を用いて表せる線形作用素についても、歴史は深いものの、最近も研究が活発になっている。これらの作用素のスペクトルや固有値を具体的に求めることは一般に困難だが、幾つかの性質を捉えることに成功した。解析学にとどまらず幾何学や物理学にも応用できる結果は、幾何学であればスペクトル幾何学、物理学ならばクローキングと呼ばれる現象にも応用されるようになった。国際研究として、世界に通じる結果を得られている。

研究成果の概要(英文)：Neumann-Poincare operator (abbreviated by NP) is a linear operator. It is also known that the NP operator is closely related to PDEs and Physical Phenomenon. Our results are concerned with the spectrum of NP (including the so-called eigenvalues). In this research, we proved that the various behaviors of the NP spectrum. As mentioned above, these results are related PDEs and Physics. In fact, we employed numerical computations and CGs. Then our results can be easily comprehended. We also collected corroborative evidences of general theory.

研究分野：大域解析学

キーワード：ノイマン・ポアンカレ作用素 スペクトル 線形作用素

## 1. 研究開始当初の背景

線形偏微分方程式の解や物理現象を記述する方法として、ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれる線形作用素が、名前の示す通り Carl Neumann や Henri Poincaré 以来、ポテンシャル論にも関連して、様々な場合で 100 年以上に亘って多くの研究がなされていた。例えば、空間 3 次元におけるラプラシアン $\Delta$ の場合には、まず、ラプラシアンの基本解と呼ばれるものは

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}$$

と表され、ラプラシアンに対応するノイマン・ポアンカレ作用素は、空間の領域 $\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ で定義される積分作用素

$$T[f](x) = \int_{\partial\Omega} \{\partial_n K(x, y)\} f(y) dS_y$$

のように書かれるものである。ここで、 $\partial_n$ は境界上の外向き法線微分と呼ばれるもので、 $dS_y$

は、境界の面素と呼ばれる積分を定義するものである。上記はごく一例に過ぎないが、様々なノイマン・ポアンカレ作用素が、100 年以上に亘って多くの研究がなされていた。

しかしながら多くの研究では、古典的な関数解析学や複素関数論を利用するに留まり、目的とする偏微分方程式の可解性や簡単な物理現象を扱えるくらいだけであった。もしくは、非常に簡単な具体例を計算するくらいであった。

物理現象や線形偏微分方程式に対応するノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル(固有値)の重要性は、茫洋と把握されてはいたものの、肝心の固有値の性質については、まだまだ多くの情報が未解明であった。

## 2. 研究の目的

本研究では、様々な状況におけるノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル(固有値)の挙動、及び、スペクトルと偏微分方程式の関係や物理現象との関連を明らかにすることを目的としている。これらスペクトルの解析は、ノイマン・ポアンカレ作用素が定義されている図形の性質とも密接に関わっており、スペクトル幾何学との関連、大域解析学との関連も見据えている。

以上、未知の数学的構造、物理現象の説明を与えることに主眼を置いているものである。

## 3. 研究の方法

ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルの解析には、古典的な手法として複素関数論や関数解析学の結果が利用可能である。実際、二次元では、スペクトルの性質を複素関数を用いて示すこともできる。

高次元の問題であったり、扱う現象が複雑な状況になると、擬微分作用素や超局所解析、さらに微分幾何の様々な量を援用して、スペクトルの解析を行なうことを見据える必要がある。また、物理現象など、目に見える現象については、数値計算を用いることも結果の想定に役立つ。

## 4. 研究成果

まず、全体的な成果を概観して、個別の研究成果は後述したい。

最初に、基本的なラプラシアンに相当するノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルから始め、二次元の場合には図形の滑らかさが固有値の挙動に影響を及ぼすことが判明した。この結果は、弾性体(Lamé 方程式)と呼ばれる系にも利用可能になった。

より現実に近い、3次元のラプラシアンは電磁気学に対応する方程式とも考えられるが、これについては擬微分作用素を使って微分幾何で現れる Willmore energy と呼ばれる量が固有値の挙動を統制していることが詳細に分かった。空間弾性体については、homogeneous と呼ばれる系における Lamé 方程式の無限個ある固有値の集積点の情報、inhomogeneous と呼ばれる系でも、本質的スペクトラムと呼ばれるスペクトルの情報を特徴づけることができた。

さらに物理現象の問題においては、cloaking 現象と呼ばれる電磁気学現象の解明もノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルを用いることができた。大規模な数値計算を用いたノイマン・ポアンカレ作用素の固有値に対応する固有関数の可視化にも成功した。

(以下に、研究成果の主な論文の内容抜粋を箇条書きで纏めてみたい)

[1] Spectral structure of the Neumann-Poincare operator on thin domains in two dimensions, Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Journal d'Analyse Mathematique, To appear

この論文では、二次元の細長い領域において、ラプラシアンに対応するノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の挙動を述べる事ができている。

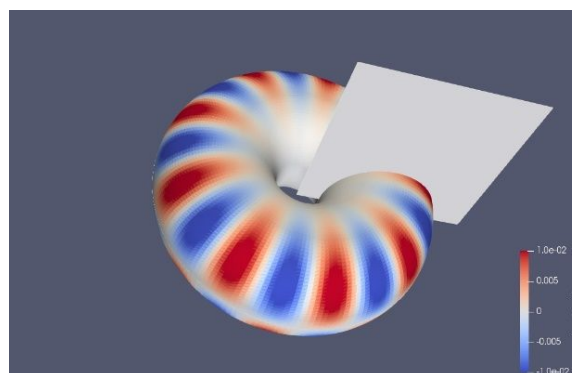
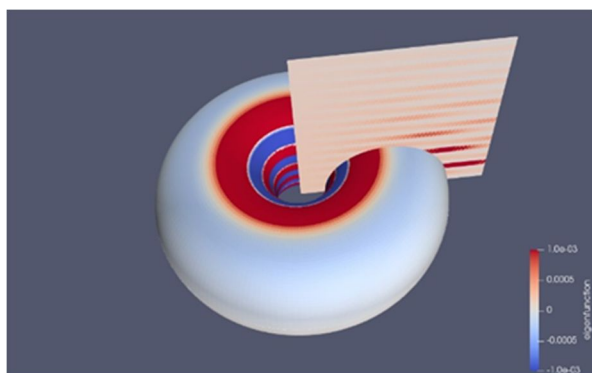
漸近的に、固有値は区間 $[-1/2, 1/2]$ を埋め尽くすことが示されている。

[2] Spectral Properties of the Neumann-Poincare Operator in 3D Elasticity, Yoshihisa Miyanishi, Grigori Rozenblum, International Mathematics Research Notices, 2021(11), (2021), 8715-8740

この論文は、非等方的な弾性体に対応するノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルを特徴づけることに成功した。本質的スペクトルや Band と呼ばれるスペクトル構造も得ることができている。勿論、等方的な弾性体の結果は含まれるものである。

[3] Surface localization of plasmons in three dimensions and convexity Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Takashi Nakazawa, SIAM Journal on Applied Mathematics, 81(3), (2021), 1020-1033

この論文では、物理現象としてクロッキングと呼ばれる現象は、3次元の凸領域では発生しないことを証明した。加えて、非凸領域としてトーラス領域でのクロッキング現象の傍証を得るため、数値計算を実行した。左下図は cloaking 現象の傍証、右下図には cloaking 現象の非存在の傍証と想定される計算結果を掲載した (なお、ジャーナルでは、下記図版の Copyright は著者で出版されている。この報告書を作るにあたり、著者は著作権フリーで同意済み)。



[4] Spectral analysis of Neumann-Poincare operator, Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Mihai Putinar, ROMANIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, LXVI (3-4), (2021), 545-575

ここでは、今までの様々成果の Summary に加え、幾つかの未解決問題の提起も行っている。数値計算にも有効な、Galerkin 法などとの関連も言及している。

[5] Convergence rate for eigenvalues of the elastic Neumann-Poincare operator in two dimensions Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees 140, (2020), 211-229

ここでは、二次元の等方的な弾性体に対応するノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の挙動が境界の滑らかさで統制されることを示した。とくに、境界が解析的な場合には固有値の減衰が指数的に減少している。複素関数論や関数解析学を利用して証明している。

[6] Spectral structure of the Neumann-Poincare operator on tori, Kazunori Ando, Yong-Gwan Ji, Hyeonbae Kang, Daisuke Kawagoe, Yoshihisa Miyanishi, Annales de l'Institut Henri Poincare, C, Analyse non linéaire, 36(7), (2020), 1817-1828

この論文では、3次元トーラスにおいて、ラプラシアンに対応するノイマン・ポアンカレ作用素には負の固有値が無限個存在することを示した。3次元において、負の固有値が無限個現れる例になっている。

つづく

[7] Eigenvalues of the Neumann-Poincare operator in dimension 3: Weyl's law and geometry, Yoshihisa Miyanishi, Grigori Rosenblum, St. Petersburg Mathematical Journal,

3次元において、境界が滑らかな場合にラプラシアンに対応するノイマン・ポアンカレ作用素の精緻な挙動を関数解析学、微分幾何学と擬微分作用素論の結果を利用し導出した。これは、トーラスの例も含み、一般化への道筋をつける論文の一つになった。

[8] The First Hadamard variation of Neumann-Poincare eigenvalues on the sphere, Y. Miyanishi, K. Ando, H. Kang, E. Ushikoshi, Proc. Amer. Math. Soc. 147(3), (2019), 1073-1080

ラプラシアンに対応するノイマン・ポアンカレ作用素の固有値は境界を変動したときに、連動して値は変化する。この論文では、Hadamard 変分公式と呼ばれる変動を表す公式を導出した。このこ戸を利用して、 $1/2$  予想と呼ばれる固有値の和や代数的な性質に対する予想の傍証を与えることに成功した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 8件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Takashi Nakazawa	4. 巻 81(3)
2. 論文標題 Surface localization of plasmons in three dimensions and convexity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1020 ~ 1033
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshihisa Miyanishi, Grigori Rozenblum	4. 巻 2021(11)
2. 論文標題 Spectral Properties of the Neumann-Poincare Operator in 3D Elasticity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 8715 ~ 8740
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Mihai Putinar	4. 巻 LXVI (3-4)
2. 論文標題 Spectral analysis of Neumann-Poincare operator	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Revue Roumaine Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 545 ~ 575
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 To appear
2. 論文標題 Spectral structure of the Neumann-Poincare operator on thin domains in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathematique	6. 最初と最後の頁 To appear
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 140
2. 論文標題 Convergence rate for eigenvalues of the elastic Neumann-Poincare operator in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliques	6. 最初と最後の頁 211 ~ 229
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Ji Yong-Gwan, Kang Hyeonbae, Kawagoe Daisuke, Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 36
2. 論文標題 Spectral structure of the Neumann-Poincare operator on tori	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institute Henri Poincare C, Analyse non lineaire	6. 最初と最後の頁 1817 ~ 1828
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshihisa Miyanishi, G. Rosenblum	4. 巻 31
2. 論文標題 Eigenvalues of the Neumann-Poincare operator in dimension 3: Weyl's law and geometry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 St. Petersburg Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 371-386
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi, E. Ushikoshi	4. 巻 147
2. 論文標題 The first Hadamard variation of Neumann-Poincare eigenvalues on the sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1073-1080
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 To appear
2. 論文標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on convex domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS kokyuuroku Kyoto	6. 最初と最後の頁 To appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Applications of Neumann-Poincare operators: non-cloaking by anomalous localized resonance for the electro-static system in three dimensional smooth convex domains
3. 学会等名 Conference in Spectral Theory and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Surface localization of plasmons in three dimensions and convexity
3. 学会等名 第16 回非線型の諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論とその応用 (日本数学会特別講演)
3. 学会等名 日本数学会 (秋季) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Eigenvalues of the Neumann--Poincare operator: Weyl's law and geometry
3. 学会等名 The Ninth Congress of Romanian Mathematicians (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Surface localization of plasmons in three dimensions and convexity
3. 学会等名 International Conference on Partial Differential Equations Related to Material Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 大域解析学: 線形作用素のスペクトル理論とその周辺
3. 学会等名 信州大学 理学部 数学科 談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on various domains and its applications to PDE
3. 学会等名 第10回信州関数解析シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on convex domains
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) 量子場の数理とその周辺(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Spectral structure of double layer potentials on thin domains
3. 学会等名 2021 年度ポテンシャル論研究集会
4. 発表年 2021年～2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Mini-Workshop on Mathematical Analysis and Related Topics	開催年 2021年～2022年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Inha University			
米国	University of California, Santa Barbara			
スウェーデン	Charmers University			
ロシア連邦	Saint Petersburg University			