

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14554

研究課題名(和文) GKZ超幾何函数の積分表示に関する研究

研究課題名(英文) Studies on integral representations of GKZ hypergeometric functions

研究代表者

松原 宰栄 (Matsubara-Heo, Saiei-Jaeyeong)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・准教授

研究者番号：70834381

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はGKZ超幾何函数と呼ばれる特殊函数の積分表示の理論を研究して、大域解析を進展させることを目標とする。また、GKZ超幾何函数の諸分野への応用を模索する。本研究によって、GKZ超幾何函数の、二次扇による解析接続公式が確立された。また、積分表示のもつ不変量((コ)ホモロジー交叉数)の組み合わせ的公式が得られた。さらに、場の量子論におけるFeynman積分への応用研究も進展した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

函数の性質を理解するうえで、その函数の満たす線形偏微分方程式系を理解することは重要である。しかし、勝手なホロノミー系を考えると具体的な解析は不可能である。GKZ超幾何系は、線形偏微分方程式系の中で大域的な解析が可能と期待される有力なクラスであるとともに、一般論では捨象されている組み合わせ的構造をもつ魅力的な対象である。本研究により、GKZ系の解析接続、積分表示に関する一般論が進展した。また、これらの成果は場の量子論の研究者からも興味を持たれ、共同研究へと繋がった。

研究成果の概要(英文)：In this project, we study integral representations of the so-called GKZ hypergeometric functions. The goal is to understand its global analysis. Moreover, we also seek applications of GKZ systems to sciences.

As a result, we described a formula of analytic continuation in terms of the secondary fan. We also clarified the combinatorial nature of an invariant that integral representations have ((co)homology intersection number). Moreover, we have developed applications for Feynman integrals in quantum field theory.

研究分野：代数解析，特殊函数

キーワード：GKZ超幾何系 交叉理論 twisted cohomology 接続問題 Feynman積分

1. 研究開始当初の背景

超幾何関数は微分方程式論、ユニタリ表現論、固有値問題、保形函数など、広範な数学に現れる重要な対象である。超幾何関数の体系的研究にはいくつかのアプローチがあるが、筆者は Gelfand, Kapranov, Zelevinsky らによって始められた GKZ 系の観点から研究を行っている。GKZ 系はホロノミーと呼ばれる D 加群のクラスをなしているばかりでなく、toric ideal の組み合わせ論、環論とも深い関係にある ([18])。また、GKZ 系は古典的な超幾何微分方程式系の多くを例として含んでいる。GKZ 系の解を、GKZ 超幾何関数と呼称する。GKZ 系の代数的研究が進展する中 (Survey 論文 [17] を参照)、GKZ 超幾何関数の解析的研究 (接続問題, モノドロミー, 漸近解析) は古典的な超幾何関数に比べ未開拓のまま残されていた。

2. 研究の目的

申請段階に置いて、筆者は GKZ 超幾何関数の、積分表示と級数表示の関係を記述していた ([7, 8, 9])。本研究の目的は、上記結果を基礎として、主に積分表示の観点から、GKZ 超幾何関数の解析的研究を深化させることであった。

3. 研究の方法

GKZ 超幾何関数の積分表示は自然に twisted (co)homology として定式化される。ここで、twisted (co)homology とは、階数 1 の局所係数の (co)homology 群である。twisted (co)homology は超幾何関数の研究に幾何学的視点をもたらす。例えば、twisted (co)homology の交叉形式は、超幾何関数の積構造 (二次関係式) を記述している ([4])。本研究では積分表示と twisted (co)homology を軸に、超幾何関数の接続問題, モノドロミー, 漸近解析などを進展させることを目指した。

4. 研究成果

本研究課題において得られた代表的成果を述べる。

1. 解析接続の公式：二次扇と呼ばれる扇の定義する toric 多様体によって、自然に GKZ 超幾何関数の接続問題が定式化される。すなわち、接続問題とは、ある torus 固定点の近傍で定義された GKZ 超幾何関数を、1 次元の torus orbit に沿って解析接続することである。実際に [1] では、GKZ 系の特殊なクラスに於いて接続問題が解かれていた。本研究では、[1] における接続問題を一般化し、任意の確定特異点型 GKZ 系の接続問題を解くことに成功した。この成果は [12] として出版されている。
2. twisted (co)homology の交叉理論：twisted (co)homology の交叉理論は、[4] によって GKZ 系の部分的なクラスに対して創始された。本研究ではこれらの研究を GKZ 系に一般化した。GKZ 系に対する twisted homology の交叉理論は [9] でその基礎が与えられ、[5] によって一般の確定特異点型 GKZ 系に対する公式が確立された。

[10] は解説論文である。他方, twisted cohomology の交叉理論については, その計算 algorithm が [13] によって定式化され, 計算代数言語の risa/asir にパッケージ mt_gkz.rr として実装された ([14])。また, 配置空間 $\mathcal{M}_{0,n}$ 上の homology 交叉理論について, associahedron と tree diagram と呼ばれる組み合わせ論的対象による記述が得られた ([11])。この論文は物理学者の Sebastian Mizera による公式 ([16]) の数学的証明を与えている。

3. Beukers-Verschoor による符号数の公式 : Frits Beukers とその学生であった Carlos Verschoor は, 既約確定特異点型 GKZ 系に対し, その monodromy 不変 Hermite 形式の符号数の組み合わせ論的な公式を予想した。[5] では, この公式が twisted homology の交叉理論から自然に導出されることが説明されている。
4. Feynman 積分への応用 : 量子場の理論において, Feynman 積分は基本的な対象である。この積分は, GKZ 超幾何函数の特殊な場合であるとみなせる。本研究での結果を基礎に, [2, 3] では GKZ 系の Feynman 積分への応用が論じられている。この研究は Padova 大学の物理学者である, Chestnov, V., Gasparotto, F., Mandal, M. K., Mastrolia, P., Munch, H. J. らとの共同研究に基づく。
5. Twisted cohomology and Likelihood ideals : [15] において, twisted cohomology を差分環 R 上の加群として捉える枠組みを提唱した。 R は非可換環であるが, この枠組みでは自然に「可換極限」を導入することができる。可換極限は代数統計の文脈で盛んに研究されている likelihood ideal ([6]) になることが発見された。本研究は Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences の Simon Telen との共同研究に基づく。

参考文献

- [1] Beukers, Frits. "Monodromy of A-hypergeometric functions." Journal für die reine und angewandte Mathematik 2016.718 (2016): 183–206.
- [2] Chestnov, V., Gasparotto, F., Mandal, M. K., Mastrolia, P., Matsubara-Heo, S. J., Munch, H. J., & Takayama, N. (2022). Macaulay matrix for Feynman integrals: linear relations and intersection numbers. Journal of High Energy Physics, 2022(9), 1–57.
- [3] Chestnov, V., Matsubara-Heo, S. J., Munch, H. J., & Takayama, N. (2023). Restrictions of Pfaffian Systems for Feynman Integrals. arXiv preprint arXiv:2305.01585.

- [4] Cho, K., & Matsumoto, K. (1995). Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann’ s period relations I. Nagoya mathematical journal, 139, 67-86.
- [5] Goto, Y., & Matsubara-Heo, S. J. (2022). Homology and cohomology intersection numbers of GKZ systems. Indagationes Mathematicae, 33(3), 546–580.
- [6] Huh, J., & Sturmfels, B. (2014). Likelihood geometry. Combinatorial algebraic geometry, 2108, 63–117.
- [7] Matsubara-Heo, Saiei-Jaeyeong. "Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions I." (2020): 75–78.
- [8] Matsubara-Heo, Saiei-Jaeyeong. "Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions II." (2020): 79–82.
- [9] Matsubara-Heo, Saiei-Jaeyeong. "Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions." arXiv:1904.00565, to appear in International Journal of Mathematics.
- [10] Matsubara-Heo, S. J. (2019). PoS (MA2019) 013 Computing cohomology intersection numbers of GKZ hypergeometric systems.
- [11] Matsubara-Heo, S. J. (2021, August). A Tree Expansion Formula of a Homology Intersection Number on the Configuration Space $\mathcal{M}_{0,n}$. In Annales Henri Poincaré (Vol. 22, pp. 2831-2852). Springer International Publishing.
- [12] Matsubara-Heo, S. J. (2022). Global analysis of GG systems. International Mathematics Research Notices, 2022(19), 14923–14963.
- [13] Matsubara-Heo, S. J., & Takayama, N. (2022). An algorithm of computing cohomology intersection number of hypergeometric integrals. Nagoya Mathematical Journal, 246, 256–272.
- [14] Matsubara-Heo, S. J., & Takayama, N. (2020, July). Algorithms for Pfaffian systems and cohomology intersection numbers of hypergeometric integrals. In Mathematical Software – ICMS 2020: 7th International Conference, Braunschweig, Germany, July 13–16, 2020, Proceedings (pp. 73–84). Cham: Springer International Publishing.
- [15] Matsubara-Heo, S. J., & Telen, S. (2023). Twisted cohomology and likelihood ideals. arXiv preprint arXiv:2301.13579.

- [16] Mizera, S. (2017). Inverse of the string theory KLT kernel. *Journal of High Energy Physics*, 2017(6), 1–24.
- [17] Reichelt, T., Schulze, M., Sevenheck, C., & Walther, U. (2021). Algebraic aspects of hypergeometric differential equations. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, 62, 137–203.
- [18] Saito, M., Sturmfels, B., & Takayama, N. (2013). *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations (Vol. 6)*. Springer Science & Business Media.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 MATSUBARA-HEO SAIEI-JAEYEONG, TAKAYAMA NOBUKI	4. 巻 未定
2. 論文標題 AN ALGORITHM OF COMPUTING COHOMOLOGY INTERSECTION NUMBER OF HYPERGEOMETRIC INTEGRALS	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1~17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2021.2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Matsubara-Heo Saiei-Jaeyeong	4. 巻 未定
2. 論文標題 Global Analysis of GG Systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnab144	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Goto Yoshiaki, Matsubara-Heo Saiei-Jaeyeong	4. 巻 未定
2. 論文標題 Homology and cohomology intersection numbers of GKZ systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.indag.2021.12.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo, Nobuki Takayama	4. 巻 12097
2. 論文標題 Algorithms for Pfaffian systems and cohomology intersection numbers of hypergeometric integrals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Computer Science 12097, ICMS 2020	6. 最初と最後の頁 73-84
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-52200-1_7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo	4. 巻 96
2. 論文標題 Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A	6. 最初と最後の頁 75-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.96.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo	4. 巻 96
2. 論文標題 Euler and Laplace integral representations of GKZ hypergeometric functions II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A	6. 最初と最後の頁 79-82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.96.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo	4. 巻 未定(online first)
2. 論文標題 A tree expansion formula of a homology intersection number on the configuration space $M_{0,n}$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales of Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 未定
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-021-01041-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo	4. 巻 74
2. 論文標題 On Mellin-Barnes integral representations of GKZ hypergeometric functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 unknown
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo	4. 巻 12
2. 論文標題 GG system and its application to connection problem of GKZ hypergeometric functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Josai Mathematical Monographs	6. 最初と最後の頁 69-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 松原 宰栄
2. 発表標題 超幾何交叉形式と large parameter
3. 学会等名 函数方程式論サマーセミナー 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松原 宰栄
2. 発表標題 GKZ 系と計算代数解析
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松原 宰栄
2. 発表標題 分割表の超幾何函数について
3. 学会等名 Recent topics in algebraic analysis (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松原 宰栄
2. 発表標題 分割表の超幾何系について
3. 学会等名 シミュレーションとモデリングのための計 算代数 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Computing cohomology intersection numbers of GKZ systems
3. 学会等名 ICMS2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Signature of the monodromy invariant hermitian form of GKZ system
3. 学会等名 GADEPs (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Computing cohomology intersection numbers of GKZ systems
3. 学会等名 A-hypergeometric conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Computing cohomology intersection numbers of GKZ systems
3. 学会等名 Limoges Computer Algebra Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松原幸栄
2. 発表標題 combinatorics of a point congruence space on Riemann sphere and homology intersection numbers
3. 学会等名 多変数関数論冬セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松原幸栄
2. 発表標題 Combinatorics of a point congruence space on Riemann sphere and homology intersection numbers
3. 学会等名 超幾何方程式研究会2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松原幸栄
2. 発表標題 cohomology 交叉数と計算代数, その1, その2
3. 学会等名 モデリングとシミュレーションのための計算代数 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松原幸栄
2. 発表標題 GKZ系の境界値問題とモノドロミー不変部分空間
3. 学会等名 函数方程式論サマー セミナー2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松原幸栄
2. 発表標題 二次扇の合流について
3. 学会等名 超幾何方程式研究会2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Connection problem of GKZ hypergeometric functions
3. 学会等名 Orthogonal Polynomials, Special Functions and its Applications (OPSA2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Boundary value problem and GKZ systems
3. 学会等名 Formal and Asymptotic Solutions of Functional Equations (FASFE19) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Computing cohomology intersection numbers of GKZ hypergeometric systems
3. 学会等名 Mathemaplitude (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo
2. 発表標題 Intersection numbers of Euler-Laplace integrals
3. 学会等名 Monodromy and Hypergeometric Functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Padova大学			
スペイン	University of Seville			
ドイツ	Max Planck Institute MiS, Leipzig			