

令和 6 年 5 月 11 日現在

機関番号：12605

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14559

研究課題名（和文）離散可積分系の背後にある幾何学的構造の解明

研究課題名（英文）Study of the geometric structure behind discrete integrable systems

研究代表者

中園 信孝（Nakazono, Nobutaka）

東京農工大学・工学（系）研究科（研究院）・講師

研究者番号：40835162

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：以下の研究成果を得た。

(1) Hexagonal Circle Patternsを持つ離散べき関数がガルニエ系およびCAC propertyの理論から導出できることを明らかにした。(2) 広田のdKdV方程式とlattice sine-Gordon方程式の立方体上のコンシステンシーの構造を明らかにした。(3) q-Painleve方程式の一般解によりdKdV方程式の特殊解が与えられることを示した。(4) A6型およびA4型のq-Painleve方程式を2階の場合として持つパンルヴェ型の高階常差分方程式系を構成し、それらのLax pairおよびaffine Weyl 群対称性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は離散可積分系の理論およびその応用に関する数学の研究である。本研究成果により、様々な非線形差分方程式の背後にある格子の構造が明らかになった。このことにより、非線形差分方程式の対称性や解に対する新たなアプローチが得られることが期待される。

研究成果の概要（英文）：I got the following results.

(1) I showed that discrete power functions with hexagonal circle patterns can be derived from the theory of Garnier systems and the CAC property. (2) I clarified the consistency structures around the cube of Hirota's dKdV equation and the lattice sine-Gordon equation. (3) I showed that the general solutions of q-Painleve equations give special solutions of the dKdV equation. (4) I constructed systems of higher-order ordinary difference equations of Painleve type with q-Painleve equations of type A6 and A4 as second-order cases. I also showed their Lax pairs and affine Weyl group symmetries.

研究分野：可積分系

キーワード：可積分系 立方体上のコンシステンシー 離散パンルヴェ方程式 Lax形式 affine Weyl群

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

差分方程式の可積分性を示す方法として、無限個の保存量の存在、線形問題（ラックス形式）への帰着、特異点閉じ込め法、代数的エントロピー、ベックルンド変換の存在など多様な方法が知られている。本研究では、特にベックルンド変換の局所的な性質である多面体上のコンシステンシーに注目する。可積分な2次元偏差分方程式の立方体上のコンシステンシーとしてCAC property [Ni]がある。研究開始当初の段階で、CAC propertyを持つ2次元偏差分方程式はたくさん知られていたが、可積分な2次元偏差分方程式のなかで最も有名な広田の離散KdV方程式 [CNP, Hi]がCAC propertyを持つか否かは知られていなかった。また、2次元偏差分方程式について、CAC property以外の多面体上のコンシステンシーの理論についてはほとんど研究されていなかった。

<引用文献>

[CNP] H.W. Capel, F.W. Nijhoff, and V.G. Papageorgiou, Complete integrability of Lagrangian mappings and lattices of KdV type, *Physics Letters. A*, 1991.
[Hi] R. Hirota, Ryogo, Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1977.
[Ni] F.W. Nijhoff, Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system, *Physics Letters. A*, 2002.

2. 研究の目的

本研究では、以下の(1), (2)を中心に取り組んだ。

- (1) 広田の離散KdV方程式の背後にある多面体上のコンシステンシーの構造を明らかにする。
- (2) 2次元偏差分方程式のCAC property以外の多面体上のコンシステンシーの理論について研究する。

3. 研究の方法

一般に、CAC propertyを持つ2次元偏差分方程式はそのCAC propertyを利用することでラックス形式が構成できる。つまり、ラックス形式には2次元偏差分方程式の多面体上のコンシステンシーの情報が含まれる。既知の広田の離散KdV方程式のラックス形式について考察することで、広田の離散KdV方程式の背後にあるコンシステンシーの構造について研究する。

4. 研究成果

広田のdKdV方程式の既知のラックス形式について考察することで、広田のdKdV方程式がCAC propertyとは異なるコンシステンシーを持つことを示した。それを筆者らはCABC propertyとよぶことにした[JN]。広田のdKdV方程式と同様にCAC propertyを持つか否かが分かっていなかったlattice sine-Gordon方程式についても、既知のラックス形式を考察することで、それがCABC propertyを持つことを明らかにした[JN, Na1]。また、CABC propertyを用いて広田のdKdV方程式とlattice sine-Gordon方程式がCAC propertyを持つことを明らかにした[Na2]。

その他にも、以下の研究成果を得た。

- Hexagonal Circle Patternsを持つ離散べき関数がガルニエ系およびCAC propertyの理論から導出できることを明らかにした[JKNM]。
- A3型, A4型, A5型, A6型のq-差分Painlevé方程式の一般解で広田のdKdV方程式の特殊解が記述できることを示した[Na3]。
- A4型, A6型のq-差分Painlevé方程式を2階の場合として持つパンルヴェ型の高階常差分方程式系を構成し、それらのLax pairおよびaffine Weyl群対称性を示した[Na4]。

<引用文献>

[JKMN] N. Joshi, K. Kajiwara, T. Masuda and N. Nakazono, Discrete Power Functions on a Hexagonal Lattice I: Derivation of defining equations from the symmetry of the Garnier System in two variables, *Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical*, 2021.
[JN] N. Joshi and N. Nakazono, On the three-dimensional consistency of Hirota's discrete Korteweg-de Vries equation, *Studies in Applied Mathematics*, 2021.
[Na1] N. Nakazono, Properties of the Non-Autonomous Lattice Sine-Gordon Equation: Consistency around a Broken Cube Property, *Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications*, 2022.
[Na2] N. Nakazono, Consistency around a cube property of Hirota's discrete KdV equation and the lattice sine-Gordon equation, *Applied Numerical Mathematics*, 2024.
[Na3] N. Nakazono, Discrete Painlevé transcendent solutions to the multiplicative-type

discrete KdV equations, *Journal of Mathematical Physics*, 2022.

[Na4] N. Nakazono, Higher-order generalizations of the A6- and A4-surface type q-Painlevé equations, *Physica Scripta*, 2023.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Nakazono Nobutaka | 4. 巻 18 |
| 2. 論文標題 Properties of the Non-Autonomous Lattice Sine-Gordon Equation: Consistency around a Broken Cube Property | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications | 6. 最初と最後の頁 032-039 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/sigma.2022.032 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Nakazono Nobutaka | 4. 巻 63 |
| 2. 論文標題 Discrete Painleve transcendent solutions to the multiplicative-type discrete KdV equations | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 042703 ~ 042703 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0054905 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Joshi Nalini, Nakazono Nobutaka | 4. 巻 8 |
| 2. 論文標題 Reduction of quad-equations consistent around a cuboctahedron I: Additive case | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B | 6. 最初と最後の頁 320 ~ 335 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/96 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Joshi Nalini, Nakazono Nobutaka | 4. 巻 147 |
| 2. 論文標題 On the three dimensional consistency of Hirota's discrete Korteweg de Vries equation | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Studies in Applied Mathematics | 6. 最初と最後の頁 1409 ~ 1424 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1111/sapm.12421 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Joshi Nalini, Kajiwara Kenji, Masuda Tetsu, Nakazono Nobutaka | 4. 巻 54 |
| 2. 論文標題 Discrete power functions on a hexagonal lattice I: derivation of defining equations from the symmetry of the Garnier system in two variables | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical | 6. 最初と最後の頁 335202 ~ 335202 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ac11bd | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

| |
|-------------------------------|
| 1. 発表者名 中園 信孝 |
| 2. 発表標題 離散KdV方程式の立方体周りの整合性 |
| 3. 学会等名 日本数学会 2023度年会 |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 中園 信孝 |
| 2. 発表標題 Special solutions to the multiplicative type discrete KdV equation |
| 3. 学会等名 日本数学会 2021年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 中園 信孝 |
| 2. 発表標題 Special solutions to the multiplicative type discrete KdV equation |
| 3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations on the Internet (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 中園 信孝 |
| 2. 発表標題 Special solutions to the multiplicative type Hirota's dKdV equation |
| 3. 学会等名 The 12th IMACS International Conference (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 中園信孝, Nalini Joshi |
| 2. 発表標題 Consistency around a cuboctahedron property |
| 3. 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Nalini Joshi and Nobutaka Nakazono |
| 2. 発表標題 Classification of quad-equations on a cuboctahedron |
| 3. 学会等名 The Eleventh IMACS International Conference (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Nalini Joshi and Nobutaka Nakazono |
| 2. 発表標題 Consistency around a cuboctahedron |
| 3. 学会等名 Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Nalini Joshi and Nobutaka Nakazono |
| 2. 発表標題 Consistency around a cuboctahedron |
| 3. 学会等名 The 4th China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Nalini Joshi and Nobutaka Nakazono |
| 2. 発表標題 Reduction to discrete Painleve equations from CACO lattice equations: -E6 type |
| 3. 学会等名 研究集会「q, q and q」 |
| 4. 発表年 2020年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
| | |