様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月２４日現在

機関番号：３７１１２

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：１９K１４５６３

研究課題名（和文）滑らかな関数の局所表示と調和解析における漸近解析

研究課題名（英文）Local representation of smooth functions and asymptotic analysis in harmonic analysis

研究代表者

野瀬　敏洋（Nose, Toshihiro）

福岡工業大学・工学部・助教

研究者番号：９０６３７９９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：局所ゼータ関数について研究を行った。ここで、局所ゼータ関数とは無限回微分可能関数を用いて右半平面上定義される複素正則関数である。
(1)2次元局所ゼータ関数の有理型解析接続がどの範囲まで行われるかを表すような、無限階微分可能関数から定まる量を定義した。その量に対する下からの評価を、単項式と平坦な関数の和で表されるようなモデル関数に対して調べた。(2)上記の評価についてのある意味での最良性を得た。特定の場合に、局所ゼータ関数が極と極でない特異性を同時にもつことを示した。(3)モデル関数における単項式の指数すべてに対して(1)で得られた下からの評価が最良であるか、という問題を肯定的に解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題では無限階微分可能関数の局所表示に関する研究が主なテーマであったが、それに関連する形で無限階微分可能関数のモデル関数に対する局所ゼータ関数の解析接続可能領域や特異点での振る舞いについて詳細な結果を得た。調和解析の他の問題において、これらの結果およびその証明方法が無限階微分可能関数を取り扱う際の指針の一つとなることが期待される。

研究成果の概要（英文）：I study local zeta functions, which are holomorphic functions on the right half-plane defined by using infinitely differentiable smooth functions.
(1) We define a quantity determined from a smooth function in two dimensions to express the size of the region to which the local zeta function associated with the smooth function can be meromorphically continued. Lower estimates of these quantities are investigated for model functions represented by the sum of a monomial and flat functions. (2) The optimality of the above estimates in some sense is obtained. In particular, it is shown that in certain cases, the local zeta functions have both polar and non-polar singularities simultaneously. (3) It is resolved affirmatively whether the estimate obtained in (1) is optimal for all monomial exponents in the model functions.

研究分野：調和解析

キーワード：局所ゼータ関数　解析接続　漸近解析　無限階微分可能関数　平坦関数　トーリック・ブローアップ

１．研究開始当初の背景

様々な解析において関数を取り扱う場合にはその関数を表すための(局所)座標系が必要となり,「良い」表示が得られるとその表示を用いることで見通しよく解析を行うことができる。ここで，振動積分とは

$$I(t)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx$$

で定義される積分であり，この無限遠点での挙動を調べることは調和解析などの諸分野において非常に重要な問題である。振動積分の漸近挙動は，相関数fの特異点論的な性質に深く関連していることが知られているが，fの臨界点が複雑に退化している場合には座標変換のみでfを簡単な形で表すことは難しい。しかしながら，関数が実解析的である場合には，その局所表示について特異点解消による「良い」表示が得られている。すなわち，代数幾何における有名な広中の特異点解消定理より，相関数が実解析的である場合には単項式の場合に帰着され、振動積分の漸近展開が得られる。なお，この局所表示は Bernstein-Gelf'and および Atiyah によって局所ゼータ関数の解析にも用いられており，局所ゼータ関数は振動積分と非常に密接に関係していることも知られている。振動積分についてさらに詳しく調べるためには特異点解消による局所表示として，相関数の退化の情報を反映するものを構成する必要があるが，Varchenko らは，相関数fが実解析的かつある種の非退化性をもつ場合に，fのニュートン多面体の幾何から得られる定量的な情報を用いて，振動積分の漸近挙動を詳細に求めた。Varchenko らの解析の本質的な部分は，fのニュートン多面体を経由して，具体的な特異点解消をトーリック多様体の理論を用いて構成するというものである。Varchenko らの研究以降，振動積分の漸近解析や調和解析の他の問題において，具体的な特異点解消の構成が重要な役割を果たす，ということが認識されてきた。一方，fが滑らかな(C^∞級)関数の場合にはそのような特異点解消の理論は存在しないため解析が非常に難しく，神本-申請者，Geenblatt，Ikromov-Müller により少しずつ結果は得られているが，決定的な結果を得るまでには至っていない.

２．研究の目的

本研究では，具体的に以下の 3 つのサブテーマを設定し，研究を進めた。

(1)ニュートン多面体を用いたトーリック・ブローアップによる，滑らかな関数の局所表示の構成。

(2)滑らかな相関数をもつ振動積分の漸近解析。

(3)局所ゼータ関数の有理型性をはじめとする関連する問題への応用。

３．研究の方法

上記で述べた(1)～(3)について，以下，具体的に述べる。

(1)滑らかな関数についてその局所表示を調べる。実解析関数に対しては，特異点解消から導かれる単項式による局所表示が得られるため，自然な予想として，滑らかな関数はブローアップを繰り返し行うことで，局所的には単項式と平坦な関数(テイラー級数が零である関数)の和で表されると考えられる。これは，平坦な関数が実解析的な関数とそうでない滑らかな関数との違いに相当するためである。本研究ではこのような単項式と平坦な関数の和の形を滑らかな関数の「モデル」であるとする。モデルの形に局所表示することを試みる際に，関数の退化の様子が反映されるように構成することも検討する。

(2)上記(1)で得られた局所表示を利用して解析を行うが，一般的な結果が得られない場合は相関数が滑らかな関数のモデルであると仮定して問題に取り組む。その場合は過去に申請者らが得た結果を一般化することを目的とする。

(3)局所ゼータ関数の特異性及び有理型関数としての振る舞いについて調べる。局所ゼータ関数

$$Z(s)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^s\varphi(x)dx$$

は右半平面で正則な関数であるが，fが実解析的であるならば，複素平面全体に有理型関数として解析接続されることが知られている。一方，fがC^∞級関数の場合にはその有理型性は一般に成り立たたないため，その辺りの事情を詳しく調べる。なお，局所ゼータ関数が一定の領域まで有理型関数として解析接続されると，フーリエ変換とメラン変換によって，振動積分の漸近挙動をある程度調べることができるということが知られている。

４．研究成果

本研究課題では無限階微分可能関数の局所表示に関する研究が主なテーマであったが，それに関連して局所ゼータ関数の解析接続可能領域や特異点での振る舞いについて以下の詳細な結果を得た。これらは上記(3)に対応した結果であるが，上記(2)への応用はまだ得られていない。しかしながら，下記の結果およびその証明方法が，調和解析の他の問題において無限階微分可能

関数を取り扱う際の指針の一つとなることが期待される。

(1)2 次元局所ゼータ関数の有理型解析接続がどの範囲まで行われるかを表すような、無限階微分可能関数から定まる量$m_0(f)$を定義した。

$$m_0(f,\varphi):=\sup\{\rho>0 : Z(s)\text{は半平面 Re(s)} > -\rho\text{を含む領域へ有理型解析接続される}\}$$

$$m_0(f):=\inf\{m_0(f,\varphi) : \varphi\text{は原点の近傍における滑らかな関数でコンパクト台をもつ}\}$$

この量$m_0(f)$に対する下からの評価を、単項式と平坦な関数の和(との非零関数の積)で表されるようなモデル関数に対して調べた。このモデル関数は平坦関数の様子によって次の 4 通りに分類される。

(A) $f(x,y)=v(x,y)x^a y^b$
(B) $f(x,y)=v(x,y)x^a y^b+g(x,y)$
(C) $f(x,y)=v(x,y)x^a y^b+h(x,y)$
(D) $f(x,y)=v(x,y)x^a y^b+g(x,y)+h(x,y)$

ここで, v,g,hは原点の近傍で定義される滑らかな非零関数で次を満たす:
・$v(0,0)\neq 0$
・g,hは原点における平坦関数であり, 原点における平坦関数g_j,h_jを用いて次で表される：
$g(x,y)=\sum_{j=0}^{b-1} y^j g_j(x)$, $h(x,y)=\sum_{j=0}^{a-1} x^j h_j(y)$
(A)の場合が実解析的な場合に対応し、$m_0(f)=\infty$となることが知られている一方、残りの 3 つの場合は非自明な状況であった。これら 3 つの場合についてそれぞれ一様に特定の半平面状領域まで局所ゼータ関数が有理型解析接続されることがわかり、上記の量の下からの評価を得た。すなわち, (B), (D)の場合に$m_0(f)\geq 1/b$となり, (C)の場合に$m_0(f)\geq 1/a$となることを示した。この結果は九州大学の神本氏との共同研究によるものである(引用文献①)。

(2)上記の 3 つの場合のうち(B)については, 特定の関数fの場合に 2 次元局所ゼータ関数が極でない特異性をもつことが既に示されていたため, (B)に属するある関数が存在して$m_0(f)=1/b$が成り立つという意味で, ある種の$m_0(f)$の最良評価が得られていた。同様に(C), (D)の場合についても以下の定理 1, 2 により, (1)で得られた$m_0(f)$の評価についての最良性を示すことができた。

定理 1. $f(x,y)=x^a y^b+x^{a-q}y^b e^{-1/|y|^p}$であるとする。ただし, a,b,qは正の整数で$2\leq a\leq b, 2\leq q\leq a$を満たし, $p>0$である。さらにqは偶数であると仮定する。このとき$Z(s)$は半平面Re(s) $>-1/a$へ有理型関数として解析接続される。この有理型関数を同じ記号$Z(s)$で表すとき, 次が成り立つ。(簡単のため, σはsの実部とする。)
(i) 2 条件：$0<p<b/a-1$, b/aが奇数でない, のうち少なくとも 1 つが成り立つとき,

$$\lim_{\sigma\to -1/a+0}(a\sigma+1)^{1+(b/a-1)/p}\cdot Z(\sigma)=-4C\varphi(0,0)$$

となる。ただし, Cは正の定数であり次で定義される。

$$C=\frac{q^{(b/a-1)/p}}{(b/a-1)}\Gamma\left(1+\frac{b/a-1}{p}\right)$$

ここで, Γはガンマ関数である。
(ii) $p=b/a-1$かつb/aが奇数のとき,

$$\lim_{\sigma\to -1/a+0}(a\sigma+1)^2\cdot Z(\sigma)=-\frac{4q}{p}\varphi(0,0)+\frac{4a}{bp!}\frac{\partial^p\varphi}{\partial y^p}(0,0)$$

となる。
(iii) $p>b/a-1$かつb/aが奇数のとき,

$$\lim_{\sigma\to -1/a+0}(a\sigma+1)^2\cdot Z(\sigma)=\frac{4a}{bm!}\frac{\partial^m\varphi}{\partial y^m}(0,0)$$

となる。ただし, $m=b/a-1$である。

この定理により, (C)の場合には局所ゼータ関数が極と極でない特異性を同時にもつ状況が起こりうるということが観察された。次の定理は(D)の場合に対応しており, 上記と同様に極でない特異性をもつ状況が見て取れる。

定理 2. $f(x,y)=x^a y^b+x^a y^{b-q}e^{-1/|x|^p}+x^{a-\tilde{q}}y^b e^{-1/|y|^{\tilde{p}}}$であるとする。ただし, $a,b,q,\tilde{q}$は正の整数で$2\leq a<b$, $2\leq q\leq b, 2\leq\tilde{q}\leq a$を満たし, $p>0$, $\tilde{p}>0$である。さらに$q,\tilde{q}$は偶数であると仮定する。このとき次が成り立つ。
(i) $p>1-a/b$のとき,

$$\lim_{\sigma\to -1/b+0}(b\sigma+1)^{1-(1-a/b)/p}\cdot Z(\sigma)=4\hat{C}\varphi(0,0)$$

となる。ただし, $\hat{C}$は正の定数であり次で定義される。

$$\hat{C}=\frac{1}{q^{(1-a/b)/p}(1-a/b)}\Gamma\left(1-\frac{1-a/b}{p}\right)$$

(ii) $p=1-a/b$のとき，

$$\lim_{\sigma\to-1/b+0}|\log(b\sigma+1)|^{-1}\cdot Z(\sigma)=\frac{4}{pq}A\varphi(0,0)$$

となる。

(iii) $0<p<1-a/b$のとき，

$$\lim_{\sigma\to-1/b+0}Z(\sigma)=C(\varphi)$$

となる。ただし，$C(\varphi)$はある定数で，a,b,p,q,φに依存するがσには依存しない。また，$\varphi(0)>0$かつ$\varphi(x)\geq 0$であるならば，$C(\varphi)>0$となる。

これらの結果は引用文献②として採録決定済みである。

(3) (2)では(B)，(C)，(D)のそれぞれの場合に$m_0(f)$の評価の等号が成立するような関数fが存在することが示されたが，「モデル関数における単項式の指数の組(a,b)のうち，自明な場合を除くすべての組に対して，(1)で得られた下からの評価は最良であるか？」という問題は未解決であった。この問題を，特定の関数fをうまく構成することで肯定的に解決した。この結果については現在論文を執筆中である。

＜引用文献＞

① Joe Kamimoto and Toshihiro Nose: Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases, J. Funct. Anal. 278 (2020), no. 6, 108408, 25pp.
② Toshihiro Nose: Meromorphic continuation and non-polar singularities of local zeta functions in some smooth cases, to appear in Tohoku Math. J.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 T. Nose	４．巻 -
２．論文標題 Meromorphic continuation and non-polar singularities of local zeta functions in some smooth cases	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Tohoku Math. J.	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 278, no.6
２．論文標題 Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases	５．発行年 2020年
３．雑誌名 J. Funct. Anal.	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2019.108408	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　7件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 野瀬敏洋
２．発表標題 ニュートン多面体から構成される特異点解消とその応用
３．学会等名 第4回i-seminar（招待講演）
４．発表年 2024年

１．発表者名 野瀬敏洋
２．発表標題 局所ゼータ関数の漸近挙動について
３．学会等名 第3回i-seminar（招待講演）
４．発表年 2023年

1．発表者名
野瀬敏洋

2．発表標題
Meromorphic continuation and non-polar singularities of local zeta functions in some smooth cases

3．学会等名
2022年度多変数関数論冬セミナー（招待講演）

4．発表年
2022年

1．発表者名
Toshihiro Nose

2．発表標題
Meromorphic continuation and non-polar singularities of local zeta functions in some smooth cases

3．学会等名
Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference, Kyoto, 2022（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2022年

1．発表者名
野瀬敏洋

2．発表標題
局所ゼータ関数の有理型解析接続と極性をもたない特異性について

3．学会等名
第1回i-seminar（招待講演）

4．発表年
2022年

1．発表者名
野瀬敏洋

2．発表標題
局所ゼータ関数の有理型解析接続と極性をもたない特異性について

3．学会等名
東京大学複素解析幾何セミナー（招待講演）

4．発表年
2020年

1．発表者名 神本丈，野瀬敏洋
2．発表標題 局所ゼータ関数の有理型解析接続可能領域について
3．学会等名 日本数学会2020年度年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 神本丈，野瀬敏洋
2．発表標題 局所ゼータ関数の極性をもたない特異性について
3．学会等名 日本数学会2020年度年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 野瀬敏洋
2．発表標題 Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases
3．学会等名 2019年度多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関