

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14565

研究課題名（和文）内在する時間遅れ構造とその抽出：時間遅れ構造を用いたダイナミクス研究の展開と発展

研究課題名（英文）Inherent time-delay structure and its extraction: Development and evolution of dynamics research using time-delay structure

研究代表者

西口 純矢（NISHIGUCHI, Junya）

東北大学・材料科学高等研究所・助教

研究者番号：60813392

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：未知関数の時間微分が未知関数の過去の情報にも依存する遅延微分方程式(DDE)においては、そのダイナミクスは履歴切片の連続関数空間における時間発展として捉えられる。これを用いたDDEの数学的定式化を遅れ型関数微分方程式と呼ぶ。

1. 定数の時間遅れをパラメータとして持つ遅延微分方程式の解の時間遅れパラメータに関する滑らか依存性の研究。2. 微分方程式の時間変数および空間変数に関する解の漸近挙動を位相力学系とその大域アトラクタの枠組みで理解するための研究。3. 平衡点の線型安定性の時間遅れパラメータ依存性に関する研究。4. 自励系の線型遅れ型関数微分方程式の軟解概念の導入とその性質に関する研究。

研究成果の学術的意義や社会的意義

制御におけるむだ時間、情報の伝播速度の有限性、個体成熟に要する期間、政策ラグなど、遅延微分方程式(DDE)としての考察が不可欠な現象が数多く存在する。DDEにおいてはそれに含まれる時間遅れのパラメータの大きさというものが問題となり、DDEの解が時間遅れパラメータにどのように依存するかを調べることは、上に述べたDDEとしての解析が不可欠なさまざまな現象の理解につながる。また、DDEと常微分方程式(ODE)との差異を調べることは、DDEのダイナミクスの特性を理解する上で重要である。本研究における軟解概念の導入は、DDEとODEとの差異を明らかにするものである。

研究成果の概要（英文）：In a delay differential equation (DDE), where the time derivative of an unknown function also depends on the past information of the unknown function, its dynamics can be viewed as the time evolution of the history segment in the space of continuous functions. The mathematical formulation of DDE using this concept is called a retarded functional differential equation (RFDE).

1. Study on the smooth dependence of solutions of DDEs on the delay parameter; 2. Study to understand the asymptotic behavior of solutions of differential equations with respect to time and space variables in the framework of topological dynamical systems and their global attractors; 3. Study on the time delay parameter dependence of the linear stability of equilibrium points; 4. Introduction of the concept of mild solutions of autonomous linear RFDEs and study of their properties.

研究分野：遅延微分方程式

キーワード：遅延微分方程式 遅れ型関数微分方程式 無限次元力学系 特性方程式 定数変化法公式

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

未知関数の時間微分が未知関数の過去の情報にも依存する遅延微分方程式(DDE)は、履歴切片の時間発展として関数空間における無限次元力学系を定める。DDEの解は自身が作り出した過去に依存してしまうため、常微分方程式(ODE)とは異なる多様な解の振る舞いを見せる。また、DDEが無限次元力学系を定めるということは、時間発展する偏微分方程式の縮約としても機能しうることを意味する。

2. 研究の目的

本研究では、上に述べたようなDDEのダイナミクスの無限次元性を多角的な観点から理解することを目的とする。

3. 研究の方法

上に述べた目的のために、以下のように研究を行った。

- DDEの解の時間遅れパラメータに関する解の滑らか依存性を微分方程式論の観点で調べる。
- Fréchet空間のような自然な距離を持たない空間を相空間とする力学系の大域挙動を位相ダイナミクスの観点で調べる。
- 線型遅延微分方程式系の零解の漸近安定性を時間遅れパラメータを用いて調べる。
- 非線型遅れ型関数微分方程式(RFDE)の平衡点近傍のダイナミクスを調べることを目的として、自励系の線型RFDEの新しい解の概念を導入する。

4. 研究成果

(1) 1つの定数遅れを持つDDEに対して、その解が遅れパラメータに関して滑らかに依存することを、初期履歴関数が絶対連続関数の場合に示した。先行研究[1],[2]ではこのような解の時間遅れパラメータに関する滑らか依存性を考える際は、初期履歴関数をLipschitz連続関数から取っていた。初期履歴関数をLipschitz連続と仮定することはさまざまな議論を平易にするが、必ずしも本質的ではない。本研究では、解の遅れパラメータに関する滑らか依存性を調べる際は、初期履歴関数の絶対連続性が本質的な条件であることを明らかにした。

解の時間遅れパラメータだけでなく初期履歴関数に関する滑らか依存性も調べるとき、初期履歴関数の空間には位相を入れて考える必要がある。先行研究ではこのような考察において、Lipschitz連続関数の空間に上限ノルムと導関数の L^1 ノルムを足して得られるノルムによる位相を考えていた。このノルム空間は完備ではなく、不動点定理を適用する際に通常の結果における完備性の仮定を少し変えたものを用いる必要がある。本研究では、初期履歴関数として絶対連続関数を取れることを明らかにしており、解の時間遅れパラメータと初期履歴関数に関する滑らか依存性においても、初期履歴関数の空間としてSobolev空間を取れることを明らかにした。

(2) 位相力学系における大域アトラクタは、相空間における任意の有界集合を吸引する最大コンパクト不変集合として定義される(参考文献:[3])。その相空間は多くの場合にはBanach空間であり、ノルムが定める自然な距離を用いて距離空間の場合に拡張される。一方で、Fréchet空間は距離化可能ではあるものの、可算無限個のセミノルムにより定まる距離関数は有界であり、任意の部分集合が有界集合となってしまう。このように、大域アトラクタを構成する条件の1つである「任意の有界集合を吸引する」というものは、相空間がダイナミクスに対する自然な距離を持っているということを前提としており、そうでない場合に大域アトラクタをどのように考えればよいかということは自明でない問題である。

本研究では、上に述べた問題を考えるために、一般の位相空間における部分集合のなすネット(点列の一般化の概念)の漸近挙動に関する研究を行い、部分集合のなすネットが漸近的にコンパクトになるための必要十分条件を導出した。

(3) 線型遅延微分方程式の零解の漸近安定性は、時間遅れパラメータによる影響を大きく受ける。その一方で、遅れパラメータがゼロ、または小さいときには漸近安定で、ある閾値を超えると零解は不安定になるという臨界遅れが存在する場合がある(参考文献:[4])。このような場合には、臨界遅れの方程式に含まれる遅れパラメータ以外のパラメータによる表示を求めれば、零解の漸近安定性を遅れパラメータの値で判定できることになる。

本研究では、1つの時間遅れパラメータを持つある線型遅延微分方程式系に対して、零解の漸近安定性に関する臨界遅れの存在を示し、その解析的表示式を導出した。この表示式は 2×2 行列のトレースと行列式を含んだものである。この意味で、本研究は先行研究[5]を拡張するものである。

(4) DDE は RFDE として数学的に定式化される (参考文献: [6]). これは, 連続な未知関数に対して履歴切片を連続関数空間 $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ の元として捉えることで, C 上のベクトル値汎関数を用いて定式化するものである. この定式化の下では, 初期条件における初期履歴関数を連続関数に取ることは自然であり, ダイナミクスの観点からも自然なものと言える. 一方で, 線型 RFDE の基本行列解を考えようとする, 初期履歴関数としてある種の「不連続関数」が現れてしまうことが知られており, このことは DDE および RFDE 研究の困難さであった (参考文献: [7], [8]).

本研究では, 上記の困難さを解消するために, 自励系の線型 RFDE に対して「軟解」と呼ぶ新たな解の概念を導入した. これは, $\int_0^t x_s ds$ という $[-r, 0]$ から \mathbb{R}^n への関数を, $\int_0^t x(s + \theta) ds$ という形の積分を用いて導入することでなされる. これにより, 0 で定義された可積分関数を初期履歴関数として持つような解の概念をわかりやすい形で導入することに成功した.

この軟解は積分方程式ベースで定義されているものの, それが $[0, \infty)$ で Lipschitz 連続である微分方程式を満たすことを明らかにした. また, これを用いて非斉次方程式に対する定数変化法公式を導出した. 加えて, 非線型 RFDE に対する線型化安定性原理に対する証明を与えた.

参考文献

- [1] J. K. Hale and L. A. C. Ladeira, Differentiability with respect to delays, *J. Differential Equations* **92** (1991), no.1, 14–26.
- [2] F. Hartung, Differentiability of solutions with respect to the delay function in functional differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **2016**, No.73, 1–16.
- [3] J. K. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, *Math. Surveys Monogr.*, Vol.25. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [4] H. Matsunaga, Delay-dependent and delay-independent stability criteria for a delay differential system, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no.12, 4305–4312.
- [5] T. Hara and J. Sugie, Stability region for systems of differential-difference equations, *Funkcial. Ekvac.* **39** (1996), no.1, 69–86.
- [6] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to functional differential equations, *Appl. Math. Sci.*, Vol.99. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] J. K. Hale, Functional differential equations, *Appl. Math. Sci.*, Vol.3. Springer-Verlag New York, New York-Heidelberg, 1971.
- [8] J. K. Hale, Theory of functional differential equations, Second edition. *Appl. Math. Sci.*, Vol.3. Springer-Verlag, New York, 1977.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Nishiguchi Junya	4. 巻 32
2. 論文標題 Mild solutions, variation of constants formula, and linearized stability for delay differential equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1~77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14232/ejqtde.2023.1.32	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Junya Nishiguchi	4. 巻 287
2. 論文標題 Asymptotic compactness in topological spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107451~107451
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107451	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nishiguchi Junya	4. 巻 91
2. 論文標題 C1 -smooth dependence on initial conditions and delay: spaces of initial histories of Sobolev type, and differentiability of translation in L_p	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1~32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14232/ejqtde.2019.1.91	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Nishiguchi Junya	4. 巻 67
2. 論文標題 Some Extension of Hara-Sugie Stability Condition by Using Critical Delay	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 61~83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.67.61	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計37件(うち招待講演 17件/うち国際学会 9件)

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 "Mild solutions" and variation of constants formula for delay differential equations
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式に対する「軟解」概念と定数変化法公式
3. 学会等名 第7回時間遅れと数理セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 "Mild solutions" and variation of constants formula for delay differential equations
3. 学会等名 12th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 "Mild solutions" and variation of constants formula for delay differential equations
3. 学会等名 The 4th International Conference on Dynamics of Differential Equations -- in Memory of Jack K.(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 “Mild solutions” for hereditary linear differential systems
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式はいかなる意味で「発展方程式」であるか？
3. 学会等名 2023 軽井沢グラフと解析研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 不連続な履歴関数により生じる遅延微分方程式の困難さの解消について
3. 学会等名 九州力学系セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式のダイナミクス研究の展望
3. 学会等名 時間遅れ系に関する研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 線型遅延微分方程式の「軟解」概念について
3. 学会等名 第7回 ODE若手セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 線型遅延微分方程式の「軟解」概念について
3. 学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 On a theory of “mild solutions” and its application to the linearized stability for delay differential equations
3. 学会等名 第113回金沢解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 線型遅延微分方程式の「軟解」概念について
3. 学会等名 2024年度日本数学会年会 函数方程式論分科会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 線型遅延微分方程式の解の基本系と基本行列解
3. 学会等名 2024 年度日本数学会年会 函数方程式論分科会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 Critical delay and stability for linear delay differential equations
3. 学会等名 Equadiff 15 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式と定数変化法公式
3. 学会等名 2022 年度 日本応用数理学会年会 正会員主催 OS「時間遅れと数理」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 時間遅れがもたらす無限次元性と超越性
3. 学会等名 2022 年度秋季総合分科会 応用数学分科会 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 Variation of constants formula for delay differential equations: revisited
3. 学会等名 13th Americas Conference on Diff. Equations and Nonlinear Analysis and ICMC Summer Meeting on Differential Equations - 2023 Chapter (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式と定数変化法公式
3. 学会等名 お茶の水女子大学微分方程式セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 Threshold condition of real part of Lambert W function and its application to a planar differential delay system
3. 学会等名 2021年度 RIMS 共同研究(公開型)「力学系理論の最近の進展とその応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 時間遅れ系への入門に向けて
3. 学会等名 第42回発展方程式若手セミナー 特別セッション「時間遅れへの誘い」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 平面上のある微分遅れ系の線型安定性のための臨界遅れの導出
3. 学会等名 日本応用数学会2021年度年会 正会員OS「時間遅れと数理」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 時間遅れ系と数理学：新たな展開に向けて
3. 学会等名 2021年度 RIMS共同研究（公開型） 時間遅れ系と数理学：理論と応用の新たな展開に向けて
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 漸近的な意味でのコンパクト性の概念について
3. 学会等名 2020年度 冬の力学系研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 位相空間における漸近的な意味でのコンパクト性
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 自然な距離を持たない相空間における力学系の大域アトラクタについて
3. 学会等名 日本応用数学会 2020年度年会 正会員主催OS「応用力学系」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 Time-delay and infinite-dimensional dynamical systems
3. 学会等名 新学術領域「次世代物質探索のための離散幾何学」2020年度第1回領域会議
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 \$C^1\$-smooth dependence on initial conditions and delay: spaces of initial histories of Sobolev type, and differentiability of translation in \$L^p\$
3. 学会等名 ICMC Summer Meeting on Differential Equations -- 2020 Chapter (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 履歴の延長と正則性に基づく関数微分方程式の理論について
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 Smooth dependence with respect to delay: temporal order of reaction
3. 学会等名 MRM2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 遅延微分方程式と履歴空間：さらなる力学系的考察に向けて
3. 学会等名 Advancing Interaction among mathematical concepts and methods towards PrActical problems 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 分岐パラメータとしての時間遅れ
3. 学会等名 第1回 時間遅れが誘導する現象と数理
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 ある不連続な関数微分方程式と L^p 空間における合成作用素の滑らかさとの関係
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 時間遅れ滑らか依存性：時間遅れがもたらす平滑化効果と反応の時間的順序
3. 学会等名 日本応用数学会2019年度年会 正会員主催OS応用力学系
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 C^1 -smooth dependence with respect to history in Sobolev space $W^{1,1}$ and constant delay: beyond Lipschitz continuous histories
3. 学会等名 11th Colloquium of the Qualitative Theory of Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 Smooth dependence on history and delay: its connection with composition operators and temporal order of reaction
3. 学会等名 力学系 -新たな理論と応用に向けて-
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Junya Nishiguchi
2. 発表標題 C^1 -smooth dependence with respect to history in Sobolev space $W^{1,1}$ and constant delay: beyond Lipschitz continuous histories
3. 学会等名 The 1st Hungary-Japan Workshop on Delay Equations and Mathematical Epidemiology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 西口 純矢
2. 発表標題 線型遅延微分方程式に対する軟解とその正則性について
3. 学会等名 さいたま数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------