

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14568

研究課題名(和文) 臨界型関数不等式の最良定数に付随する変分問題

研究課題名(英文) Variational problems associated with best constants of functional inequalities in a limiting case

研究代表者

佐野 めぐみ (Sano, Megumi)

広島大学・先進理工系科学研究科(工)・准教授

研究者番号：70834935

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Hardy不等式やSobolev不等式等の関数不等式の最良定数及び付随する最小化問題の達成可能性(不等式の等号成立条件)について研究を行った。具体的には「内点特異性をもつ古典的Hardy不等式と境界特異性をもつGeometric Hardy不等式の最良定数まで含め結合したような一般形(複数特異性をもつHardy型不等式)の導出、高階への一般化、極限形の導出」と「Sobolev不等式のある種の臨界形である一般化臨界Hardy不等式に付随する埋め込みのコンパクト性(Non-radial compactness)」について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Sobolev不等式やHardy不等式をはじめ関数不等式の最良定数及び付随する変分問題に関する研究は、それ自体の興味もさることながら関数空間同士の埋め込みの関係性を表し、さらに偏微分方程式の解の存在や安定性解析、時間大域的挙動等を議論する際に重要な役割を果たすことから大変基本的であり重要な研究課題の一つである。特に臨界ソボレフ空間上で成立する関数不等式とその最良定数に付随する変分問題は、劣臨界の場合と比べて解析上困難な点も多く、未解決問題が数多く残されており、理論を整備するのが当該分野で重要な課題となっている。本研究もその一環である。

研究成果の概要(英文)：I studied minimization problems associated with best constants of Hardy type inequalities and Sobolev type inequalities. Concretely, I gave a new Hardy type inequality which has multiple singularities. This inequality improves both the classical Hardy inequality with interior singularity and the geometric Hardy inequality including these best constants. Also I generalized it to higher order case and studied its limiting form. Furthermore, I showed "Non-radial compactness" of related embedding to the generalized critical Hardy inequalities which is a critical case of the Sobolev inequality.

研究分野：関数不等式の最良定数に付随する変分問題

キーワード：最小化問題 最良定数 Hardy不等式 コンパクト性 達成可能性 臨界Sobolev空間

1. 研究開始当初の背景

関数不等式の最良定数及び付随する変分問題に関する研究は、それ自体の興味もさることながら関数空間同士の包含関係を表し、さらに現象を記述する微分方程式の解の存在や安定性解析、時間大域的な挙動等を議論する際に重要な役割を果たすことから大変基本的かつ重要な研究課題の一つである。本研究では関数の滑らかさと特異性がつり合っている状態にある関数に対する種々の関数不等式(臨界型関数不等式)の最良定数に付随する変分問題の最小・最大化関数の存在に関して研究を行う。特に関数の性質(滑らかさや特異性等)を表す複数のパラメータが二重につり合っている複雑な状況の場合に解決することを目標とする。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「臨界型関数不等式の最良定数に付随する変分問題について明らかにすること」である。臨界ソボレフ空間に所属する関数は、滑らかさ(微分可能性)と特異性の強さ(可積分性)がつり合った状態にあるような関数であり、臨界型関数不等式とは、臨界ソボレフ空間に所属する関数に対する絶対関数不等式のことである。臨界型でない関数不等式の最良定数に付随する変分問題に関しては古くから多くの研究者によって研究が成されているが、臨界の場合は劣臨界の場合と比べて解析上困難な点も多く、未解決問題が数多く残されており、理論を整備するのが当該分野で重要な課題となっている。特に本研究では、「重み付き臨界ソボレフ空間を考察することで生じる二重臨界(臨界指数が二つある状態)の場合に関して、変分問題の最小及び最大化関数の存在・非存在を明らかにすること」を目標とする。

3. 研究の方法

研究の方法としては、球対称再配列の理論及びその他の球対称化の方法・テスト関数の方法・凝集コンパクト性原理・スケーリング法・調和移植等を用いた。

4. 研究成果

これまで Hardy 型不等式及びその他の種々の関数不等式の「最良定数の値」や「付随する最小化問題の達成可能性(不等式の等号成立条件)」に関する研究を行ってきた。具体的に得られた研究成果としては以下の通りである。

(1) 関数不等式の極限形の導出

通常、関数不等式に対する極限というものはないが、本研究では Hardy 型不等式や Poincare 不等式の指数や領域に関して極限をとるというある種の手法を提案した。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Sano, M. and Sobukawa, T., Remarks on a limiting case of Hardy type inequalities, *Math. Inequal. Appl.* 23 (2020), no. 4, 1425-1440.

(2) 改良型 Hardy-Sobolev 不等式の最良定数に付随する最小化問題

単位球上での古典的な Hardy-Sobolev 不等式は球対称関数に限定した場合、境界に特異性を持ったポテンシャル関数を付加することで改良できることが知られている。この単位球上での改良型 Hardy-Sobolev 不等式は球対称関数の場合、全空間の古典的 Hardy-Sobolev 不等式と同値であり、最良定数やその達成可能性、スケール不変構造などはこの変換により導くことができる。本研究では、球対称関数に制限しない改良型 Hardy-Sobolev 不等式について考察し、Sobolev タイプの場合に球対称性の破れが起こることを示し、それを用いて Hardy-Sobolev タイプの場合は非球対称な最小化関数が存在することを示した。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Sano, M., Minimization problem associated with an improved Hardy-Sobolev type inequality, *Nonlinear Anal.* 200 (2020), 111965, 16 pp.

(3) Hardy 型不等式は通常等方的であるが、それらを非等方的である Finsler Hardy 型不等式に一般化した。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Mercaldo, A., Sano, M., and Takahashi, F., Finsler Hardy inequalities, *Math. Nachr.* 293 (2020), no. 12, 2370-2398.

(4) 複素解析学で現れるリーマンの写像定理から自然に導出される変換である調和移植を起点とし、これまで発見されてきた様々な変換の統一的解釈や新たな応用例(不等式の改良や極限形の導出等)について考察を行った。具体的には、半空間上でのハーディー不等式の改良及びその

臨界形の導出を行い、それぞれ最良定数とその達成可能性について研究を行った。調和移植は領域上のグリーン関数を用いた変換であるが、半空間の場合は p -ラプラシアンが非線形な作用素であるため、折り返しの方法が適用できず、グリーン関数の具体的な表示が得られない。そのため球上のように調和移植を用いて、Hardy 不等式を改良することが難しくなる。そこで具体的に表示されている半空間上の優調和関数を見つけ出し、グリーン関数の代わりにそれを用いて調和移植を行うことで、半空間上においても Hardy 不等式を改良できることを証明した。またその改良型ハーディー不等式の極限形として、半空間上での臨界ハーディー不等式を導出した。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Sano, M. and Takahashi, F., Critical Hardy inequality on the half-space via the harmonic transplantation, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 61 (2022), no. 4, Paper No. 158, 33 pp.

(5) 内点特異性をもつ古典的 Hardy 不等式と境界特異性をもつ Geometric Hardy 不等式的最良定数まで含め結合したような一般形(複数特異性をもつ Hardy 型不等式)の導出、高階への一般化、極限形の導出に関する考察を行った。これらの3つのタイプの Hardy 型不等式は、ガウスの発散定理を違う3つの使い方をして得られることを示し、また3つの不等式の関係性をそれぞれが持つ virtual minimizer を用いて説明し、ある種の積構造があることを述べた。また高階の Hardy 不等式 (Rellich 不等式) に関しては、現在の未解決問題を含む形でより一般的な Conjecture としてまとめた。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Sano, M., Improvements and generalizations of two Hardy type inequalities and their applications to the Rellich type inequalities, *Milan J. Math.* 90 (2022), no. 2, 647-678.

(6) Sobolev 不等式のある種の臨界形である一般化臨界 Hardy 不等式に付随する埋め込みのコンパクト性について考察を行った。臨界ソボレフ空間を球対称な空間と非球対称な空間に分解し、非球対称な空間に制限した場合は埋め込みがコンパクトになることを証明した。これはよく知られた現象である Strauss の radial compactness と真逆の現象であり、興味深い結果と言える。さらに対応する最小化問題がなぜパラメータによって最小化元の存在・非存在が変わるのかを直感的に説明するものである。この結果は以下の論文原稿にまとめられ、国際雑誌から出版されている。

Machihara, S. and Sano, M., On the compactness of the non-radial Sobolev space, *J. Math. Anal. Appl.* 520 (2023), no. 1, Paper No. 126897, 11 pp.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sano Megumi、Takahashi Futoshi	4. 巻 61
2. 論文標題 Critical Hardy inequality on the half-space via the harmonic transplantation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-022-02265-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sano Megumi	4. 巻 200
2. 論文標題 Minimization problem associated with an improved Hardy-Sobolev type inequality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 111965 ~ 111965
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2020.111965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sano Megumi、Sobukawa Takuya	4. 巻 23
2. 論文標題 Remarks on a limiting case of Hardy type inequalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Inequalities & Applications	6. 最初と最後の頁 1425 ~ 1440
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7153/mia-2020-23-102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mercaldo Anna、Sano Megumi、Takahashi Futoshi	4. 巻 293
2. 論文標題 Finsler Hardy inequalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2370 ~ 2398
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201900117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sano Megumi	4. 巻 2172
2. 論文標題 Two limits on Hardy and Sobolev inequalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS講究録「偏微分方程式の解の幾何的様相 (Geometric aspects of solutions to partial differential equations RIMS 共同研究 (公開型))」	6. 最初と最後の頁 105 ~ 119
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sano Megumi	4. 巻 267
2. 論文標題 Extremal functions of generalized critical Hardy inequalities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2594 ~ 2615
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.03.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sano Megumi, Takahashi Futoshi	4. 巻 98
2. 論文標題 Weighted Hardy's inequality in a limiting case and the perturbed Kolmogorov equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 1875 ~ 1888
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00036811.2018.1471208	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 Weighted Hardy's inequality in a limiting case and the perturbed Kolmogorov equation
3. 学会等名 PDEs and Probability Theory - beyond boundaries - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 The critical Hardy inequality on the half-space via harmonic transplantation
3. 学会等名 大阪大学微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 調和移植とその関数不等式への応用
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 Improvements and generalizations of two Hardy type inequalities
3. 学会等名 The 23rd Northeastern Symposium on Mathematical Analysis（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 調和移植とその関数不等式への応用
3. 学会等名 日本数学会年会 関数解析学分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 Improved Hardy inequalities
3. 学会等名 Elliptic and Parabolic Zoom Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 臨界型レリッヒ不等式について
3. 学会等名 茨城大学 金曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Sano Megumi
2. 発表標題 Minimization problems associated with embedding of the critical Sobolev spaces
3. 学会等名 Minisymposium “Qualitative properties of solutions to Elliptic and Parabolic PDEs and related topics” at “International Conference on Elliptic and Parabolic Problems” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sano Megumi
2. 発表標題 A limiting case of the Hardy type inequalities via extrapolation method
3. 学会等名 6th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sano Megumi
2. 発表標題 A limiting case of the Hardy type inequalities via extrapolation method
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「偏微分方程式の解の幾何的様相(Geometric Aspects of Solutions to Partial Differential Equations)」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sano Megumi
2. 発表標題 Minimization problem associated with an improved Hardy-Sobolev inequality
3. 学会等名 2019 International Workshop on PDEs and Applications (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐野めぐみ
2. 発表標題 Minimization problem associated with an improved Hardy-Sobolev inequality
3. 学会等名 日本数学会年会 一般講演
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------