

令和 5 年 6 月 10 日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14569

研究課題名（和文）特異性を持つ初期値に対する非線形熱方程式の可解性

研究課題名（英文）Solvability for a nonlinear heat equation with singular initial data

研究代表者

藤嶋 陽平（Fujishima, Yohei）

静岡大学・工学部・准教授

研究者番号：70632628

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、自己相似性を持たない一般の半線形熱方程式に対する可解性およびその解挙動についての研究を行った。半線形熱方程式の可解性には方程式特有の性質である自己相似性が鍵となり、方程式の解の存在・非存在が論じられる。しかし非線形項が特別な型の場合を除き、その性質は期待できない。研究代表者は、冪乗型方程式に対する自己相似変換を一般化した準自己相似変換およびそこから生じる性質を用いて、既存の結果を包括する形で一般の半線形熱方程式に対する可解性を特徴付けすることに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題では、冪乗型や指数型半線形熱方程式に対して知られている自己相似変換を一般化した準自己相似変換に着目し、半線形熱方程式の研究を行った。特に準自己相似性が半線形熱方程式の可解性に応用可能であり、方程式の解の存在および非存在に対して精緻な結果が得られることを示した。これは準自己相似性の有用性を表すものであり、これまでの自己相似性に基づく解析手法を、一般の半線形熱方程式に対して拡張可能であることを示唆するものである。

研究成果の概要（英文）：This research project is devoted to the solvability and the behavior of solutions for general semilinear heat equation which does not possess the self-similarity. Although the solvability for a semilinear heat equation in previous studies is based on the scale invariant property for the equation, this property is not expected for a wide class of semilinear heat equations except for a power and an exponential type nonlinearity. Principal investigator focused on a generalization of the self-similar transformation for power type semilinear heat equation, and characterized the solvability for a general semilinear heat equation by using a quasi self-similar transformation.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：半線形熱方程式 準自己相似性 可解性 初期値の特異性 初期値の空間減衰 藤田指数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 半線形熱方程式は拡散項と非線形項の相互作用により解は様々な挙動を呈する。従って、解の性質を調べるためには拡散効果により生じる解の均一化作用と、非線形効果により生じる解の増幅作用のバランスが重要である。そのバランスを定量的に表す指標が、方程式固有の性質である「自己相似性」であると考えられる。しかし、自己相似性は冪乗型や指数型といった特殊な型の半線形熱方程式にのみ期待されるものであり、一般の半線形熱方程式に対しては成立しない。

(2) 一方、研究代表者は一般の半線形熱方程式に対して、冪乗型半線形熱方程式に対して知られている自己相似変換を一般化した、「準自己相似変換」を提唱し、これまでにその応用として爆発集合の特徴付けを行っている。この準自己相似変換は冪乗型および指数型半線形熱方程式に対する自己相似変換を一般化するに留まらず、方程式が自己相似性を持つための条件までも導出するものである。それは方程式の自己相似性、すなわち、拡散と非線形のバランスを特徴付けする要因の特定にも繋がった。

(3) 上記の考察に基づき、準自己相似性に着目することで、自己相似性を持たない一般の半線形熱方程式に対して解の存在・非存在を特徴付けすることができるのではないかとこの発想に至り、研究を開始した。

2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は一般の非線形性を持つ半線形熱方程式に対する可解性理論を構築することである。特に時間局所解および時間大域解が存在するための初期値の条件を導く。

(2) 時間局所可解性については、初期時刻における関数の特異性が解消されるか？という問題を考察する。特異性を解消させる拡散の効果と特異性を強める非線形の効果のせめぎ合いを数学的に表現することが目的である。

(3) 時間大域可解性については、初期値関数の空間無限遠での減衰の効果が非線形に対して優位に働くか？という問題を考察する。そのためには解の時間減衰の要因となる減衰の効果と非線形項による増大の効果のバランスを規定することが必要となる。

3. 研究の方法

(1) 上記の研究の目的を達成するため、研究代表者により提唱された「準自己相似変換」に着目する。

(2) はじめに時間局所可解性について論じる。冪乗型半線形熱方程式に対しては解が存在するための初期値の特異性が、関数の可積分性を用いて表現されている。(Weissler 1980年)これは初期時刻における特異性の解消のための拡散と非線形の効果のバランスを数学的に表現したものであるが、その特徴付けは方程式の自己相似性に帰着する。従って、一般の半線形熱方程式に対しては準自己相似性とその特徴付けを与えるかを考察する。

(3) 次に時間大域可解性について論じる。冪乗型半線形熱方程式に対して、時間大域可解性を分ける「藤田指数」と呼ばれる臨界指数の存在がよく知られている。この臨界指数を境に時間大域解の存在・非存在に分ける状況が大きく様変わりする。時間大域解について論じるためには「藤田指数」の一般化を行うことから始め、その後、初期値の空間減衰との関係について調べる。特に、藤田指数については自己相似性に基づく特徴付けが可能であるため、準自己相似性を用いることで一般の半線形熱方程式に対する臨界指数の導出を行う。

4. 研究成果

(1) 一般の半線形熱方程式に対する時間局所可解性の特徴付けに成功した。研究代表者らの既存の研究(Fujishima-Ioku 2018年)によって、時間局所可解性を特徴付ける初期値の可積分性は得られていた。その可積分性は準自己相似変換のもとで不変な積分量によって特徴付けられる。特に臨界現象に着目すると、そこで現れる積分から、初期値の特異点付近

での発散度が推察される。本研究では、ある状況下では、積分から推察される発散度が実際に時間局所可解性を分ける臨界の特異性を与えることを示した。可積分性に基づく可解性の特徴付けでは、具体的な発散度を求めることができないが、弱ルベグ空間と呼ばれる広い空間での可解性を考察したことにより、上記の特徴付けを行うことができた。

(2) 一般の半線形熱方程式の時間大域解の存在・非存在を分ける臨界指数の導出に成功した。同時に、大域解が存在するための初期値の空間減衰について、可積分性に基づく特徴付けを行った。

準自己相似変換に基づく可解性の議論により、拡散と非線形の効果のバランスを規定する関数が導き出される。その関数の極限に着目することにより、時間大域解の存在・非存在を分ける臨界指数を、非線形項を表す関数により特徴付けた。これは冪乗型半線形熱方程式に対する藤田指数の一般化に相当するため、自然な拡張となっている。

一般化された藤田指数が大域可解性を分ける臨界指数であることを示すために、実際に大域解の構成および解の有限時間爆発を示した。有限時間爆発を示すためには、解が満たすべき必要条件を導出した。時間大域解の存在を示す方法は、準自己相似変換に基づく。本研究を通して重要な性質は、準自己相似変換を介して、

「冪乗型または指数型半線形熱方程式の可解性が一般の方程式の可解性を与える」

ことである。これは時間局所解の存在を示すためにも用いられた性質である。時間大域解の存在を示すためには、非線形項の無限大およびゼロ付近での挙動が重要となるため、単一の非線形項のみによる上記性質の利用では不十分で、議論の改良が必要となる。そこで、本研究では無限大付近とゼロ付近での挙動が異なる非線形項を利用し、一般の半線形熱方程式に対する時間大域解の存在を示すことに成功した。

ここで得られた、時間大域解が存在するための初期値の減衰条件(可積分性)については、冪乗型半線形熱方程式に対する初期値の条件(Weissler 1981年)に一致するものであり、さらにそれは準自己相似変換のもとで不変な積分にも一致する、自然な条件である。

(3) 単独の半線形熱方程式に留まらず、半線形熱方程式の連立系についても時間局所可解性を特徴付ける初期値の特異性(発散度)を求めることにも成功した。

単独の半線形熱方程式に対しては、自己相似性を持つ冪乗型半線形熱方程式に対しては詳細な可解性の特徴付けがなされている。一方、複数の半線形熱方程式を組み合わせた連立系については、拡散と非線形の相互作用に加え、方程式間の相互作用までも考慮する必要があり、状況はより複雑になる。特に弱連立系と呼ばれる比較的単純な連立系の場合でも可解性の特徴付けは未知であるため、研究を開始した。

連立系に対して、単独の方程式の結果を含む形で時間局所解の存在・非存在のための初期値の特異性(発散度)を特徴付けすることに成功した。得られた結果を俯瞰すると、弱連立系のような単純な連立系でも、単独の方程式の場合に比べて状況が複雑であることが明らかになった。そこには単独の方程式の場合では現れない、連立系特有の状況も含まれており、方程式間の相互作用を加味することで数学的に非常に興味深い問題が生じることが判明した。

(4) 上記の可解性の研究に加え、拡散項が解の挙動に与える影響を詳細に調べるために、

非線形拡散項に関連して、Quasi parabolic minimizer の研究

退化する拡散係数を持つ半線形熱方程式の解挙動の研究

を行った。特にこれらの研究は海外の研究者との共同研究に昇華し、国際共同研究となった。これらの研究を通して、拡散効果の違いが解の挙動に与える影響について詳細な結果を得ることができた。特に、Quasi parabolic minimizer については、一般の距離空間上での解析に拡張されるため、ユークリッド空間上の拡散現象に限らない一般の拡散現象の解析が可能となる。

(5) 本研究を通して、一般の半線形熱方程式に対して時間局所可解性および時間大域可解性を特徴付ける初期値の条件を導出することができた。しかし、すべての状況が明らかになったわけではなく、

時間局所解の存在・非存在を分ける臨界の発散度は一部の状況下でのみ得られている。

時間大域解を特徴付ける初期値の空間減衰度は明らかではない。

連立系の取り扱いの一部に限られる。

上記のような課題が新たに生じたため、今後研究を進展させ、半線形熱方程式および連立系に対する可解性理論を完成させることを目指す。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fujishima Yohei, Ioku Norisuke	4. 巻 3
2. 論文標題 Global in time solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-022-00158-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 FUJISHIMA Yohei, ISHIGE Kazuhiro	4. 巻 73
2. 論文標題 Initial traces and solvability of Cauchy problem to a semilinear parabolic system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1187 ~ 1219
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/84728472	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujishima Yohei, Ioku Norisuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Solvability of a Semilinear Heat Equation via a Quasi Scale Invariance	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's	6. 最初と最後の頁 79 ~ 101
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-73363-6_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujishima Y., Habermann J.	4. 巻 198
2. 論文標題 Finite speed propagation for parabolic quasiminimizers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 111891、1 ~ 17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2020.111891	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujishima Yohei, Ishige Kazuhiro	4. 巻 32
2. 論文標題 Blowing Up Solutions for Nonlinear Parabolic Systems with Unequal Elliptic Operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1219 ~ 1231
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-019-09790-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujishima Y., Habermann J.	4. 巻 198
2. 論文標題 Finite speed propagation for parabolic quasiminimizers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 111891 ~ 111891
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2020.111891	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujishima Yohei, Hisa Kotaro, Ishige Kazuhiro, Laister Robert	4. 巻 23
2. 論文標題 Solvability of superlinear fractional parabolic equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-022-00853-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 藤嶋陽平
2. 発表標題 Global in time solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure
3. 学会等名 Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yohei Fujishima
2. 発表標題 Solvability for a semilinear heat equation without the self-similar structure
3. 学会等名 VI Italian-Japanese workshop `Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	猪奥 倫左 (Ioku Norisuke)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	University of Erlangen-Nuremberg			
米国	Johns Hopkins University			