

令和 5 年 6 月 3 日現在

機関番号：16201

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14580

研究課題名（和文）非線形分散型方程式における散乱理論の新展開

研究課題名（英文）New developments in scattering theory for nonlinear dispersive equations

研究代表者

宮崎 隼人（Miyazaki, Hayato）

香川大学・教育学部・准教授

研究者番号：70752202

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、偏微分方程式の一種である非線形分散型方程式の解挙動に関する研究を行った。特に、非線形シュレディンガー方程式において、解が時刻無限大で線形方程式の解のように振る舞う散乱解に関する研究を行い、解が星グラフ上にある場合や方程式に調和振動子型のポテンシャルを持つ場合に、非線形性の影響を含む修正散乱解と呼ばれる解を構成することができた。また非線形クライン・ゴールドン方程式の連立系において、定在波が強不安定となる条件を特定することができた。この結果は、サイズが大きい散乱解に関する研究の足がかりとなることが期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフ上の非線形偏微分方程式は、分岐構造を考慮した数理モデルを考えると自然に現れるものであり、応用上の観点からも重要な研究対象である。非線形分散型方程式の散乱理論の研究において、星グラフ上の修正散乱解の存在を示したのは初めてであり、基本的な結果といえる。また、線形部にポテンシャルを持つ場合も、技術的な問題から空間1次元に限定した先行研究が多く、多次元において修正散乱解を構成できたことは重要な成果であったと考えている。

研究成果の概要（英文）：We study the behavior of solutions to nonlinear dispersive equations. In particular, we consider scattering solutions of the nonlinear Schrödinger equation. The solution behaves like linear solutions for a large time. On this research, we succeed in constructing scattering solutions that include the effects of nonlinearity in the case of that the solutions are on star graphs, or the equation has a kind of harmonic oscillator. Furthermore, we specify the condition under which standing waves of the system of nonlinear Klein-Gordon equations are strongly unstable. This result serves as a starting point for the study of scattering solutions in the system with large data.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 解挙動 散乱理論 定在波 安定性

1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式の一種である非線形分散型方程式は、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴールドン方程式、コルトヴェーグ・ドフリース方程式といった物理現象を記述する様々な近似モデルを内包し、理論と応用の両面において重要な研究対象である。その近似モデルの導出の妥当性を与える指標が、初期値問題の適切性である。まず第 1 に、初期データの変動に対して安定な唯一の解がある時刻まで存在する局所適切性、第 2 にその解が時間大域的に存在する大域適切性である。考える問題が局所適切であれば、そのモデルの妥当性が保証され、大域適切であれば、現象の長時間安定性が担保される。このような解の適切性は、方程式固有の尺度不変則に関して不変な関数空間(尺度臨界空間)と、エネルギーや質量等の方程式固有の物理量が定義される関数空間(物理空間)の枠組で証明されることが期待される。尺度臨界空間では、解の局所適切性が示されれば、直ちに小さな大域解の存在が導かれるため(藤田・加藤の原理)その重要性は広く認識されている。非線形分散型方程式における解の適切性の研究は、Bourgain や Ponce、近年では Visan らにより大きく進展した。しかし、コルトヴェーグ・ドフリース方程式でさえ尺度臨界空間での適切性は未解決であり、重要課題が山積している。適切性の次に考えるべき課題は、時間発展したときの解の挙動を解明することである。この解明は、対応する現象の未来予測に繋がる。非線形分散型方程式は、線形部から生じるエネルギー散逸なしに波を空間全体に広げる分散性と、波を集中させる非線形性の相反する性質を持ち、これらの相互作用により解の挙動は様々な様相を示す。主な挙動として、分散性が優位なとき、非線形性の影響が時間減衰し、時刻無限大で安定な自由方程式の解に漸近する散乱解、分散性と非線形性が釣り合うとき、振幅が一定の形状を保ち続ける孤立波解、非線形性が優位なとき、分散性が抑制され 1 点に局在化することにより、有限時刻または時刻無限大で解の特定のノルムが発散する爆発解が知られている。

特に散乱解を対象とする理論は散乱理論と呼ばれ、日本人研究者による豊富な蓄積がある。方程式の非線形性が弱く散乱解を持つ場合、短距離型という。一方、非線形性が強くなると、どんなに小さな解を考えても解の漸近挙動に非線形性の影響が現れる。この場合は長距離型と呼ばれ、短距離型と長距離型の境界では、非線形性の影響を受け自由解の位相を修正した解に漸近する(修正散乱解)。より非線形性が強い場合の漸近挙動は未解決であり、重要な課題である。与えられた解の漸近形に時刻無限大で漸近する解が存在するとき、波動作用素が構成できる(終値問題)。一方、任意の初期値に対して、自由解に漸近する解とその漸近形が存在するとき、逆波動作用素が構成でき(初期値問題)、一般に後者の場合が難しい。

散乱理論の最終目標は、終値問題で与えられた漸近形から決まる、負の時刻無限大における終値状態と、初期値問題で構成した正の時刻無限大における終値状態を対応づける散乱作用素の存在を示すことである。散乱作用素が存在すれば、与えられた方程式で支配される系において、過去の状態から未来の状態を予測することが可能となる。散乱作用素の存在を示すには、初期値のクラスである波動作用素の値域と逆波動作用素の定義域が一致する必要があり、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン・ゴールドン方程式の一部の場合を除いてその試みは達成できておらず、重要な未解決問題として認識されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形分散型方程式に属する種々の方程式における散乱理論の構築を通して、解の長時間挙動を解明することである。特に、種々の方程式における修正散乱解を構成することで、解の漸近挙動に対する非線形性の影響をより深く理解することを第 1 の目的とした。また、これらの研究を通して、短距離型と長距離型の境界ではなく、真に長距離型の場合の解挙動を特定する将来的な足がかりを掴むことを目指した。

第 2 に、非線形分散型方程式系において、定在波近傍の解が散乱するための条件を特定することを通して、解が散乱するための条件をエネルギーの観点から理解することを目的とした。そのため、まずは鍵となる定在波の安定性を解明することを目指した。

3. 研究の方法

修正散乱解を構成するための鍵となるのは、それぞれの方程式から導かれる、解の漸近挙動の主要部を決定する常微分方程式を特定することである。この常微分方程式の解を主要部に持つような元の方程式の解が存在することを示せるかどうか、最も扱いが難しい点である。そのための標準的な手法の 1 つが Hayahi-Naumkin により整備された factorization technique である。この手法を各方程式の特徴に合わせて修正または発展させることで、修正散乱解の構成を図る。非線形分散型方程式の定在波の安定性を解明するための第 1 歩は、基底状態解を変分論的手法で特徴づけることである。この特徴づけに基づく安定性を解明する代表的な解析手法は

Cazenave-Lions が考案した方法である。また、virial 等式を用いた Berestycki-Cazenave に基づく方法により不安定性も調べることができる。Virial 等式が存在しない方程式の場合、不安定性の解明には独自の手法が必要となる。非線形性の影響により定在波が安定であるか不安定であるかが変化するので、各々の方程式やその非線形項に応じて解析していくことが求められる。

4 . 研究成果

研究期間全体を通して 6 編の論文が国際誌に掲載または掲載受理された。また、学会発表を 21 件行い、うち招待講演を 18 件、国際発表は 4 件行った。以下で、主たる論文 5 編について、その概要を述べる。

(1) 相対論的な粒子の運動を記述する非線形クライン・ゴールドン方程式の連立系における定在波解の安定性について考察した。結果、定在波の振幅が基底状態解である場合、基底状態解から十分近い関数を初期値に持つ解は、特定の条件下で爆発不安定(有限時刻で解の特定の積分量が発散する)となることがわかった。この結果は論文にまとめ、Discrete & Continuous Dynamical Systems に掲載された。本論文は、初期値の特定の汎関数の値により解挙動を分類することにより、物理空間等での散乱理論を構築する際の足がかりとなることが期待される。

(2) 必ずしも多項式とは限らない一般の斉次型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式において、解が有限時間爆発する場合に、解の最大存在時刻の上からの評価を精密化することに成功した。本結果は側島基宏氏との共同研究であり、以前研究代表者が眞崎聡氏との共同研究で得ていた結果を、現時点の手法で最良の結果まで精密化したものである。本論文は、Advances in Harmonic Analysis and Partial Differential Equations に掲載された。

(3) 結合部にキルヒホッフ境界条件を課した、星グラフ上のべき型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式における解の漸近挙動について考察した。グラフ上の非線形偏微分方程式は、分岐構造を考慮した数理モデルを考えると自然に現れるものであり、応用上の観点からも重要な対象として、近年多方面で研究が進んでいる。解の漸近挙動を考察するためには、ドロード分解と呼ばれる、シュレディンガー作用素を 4 つの要素に分解する手法が重要となる。本研究では、キルヒホッフ境界条件下の星グラフ上でもドロード分解が可能であることを示すとともに、この分解に起因する factorization technique が展開可能であることを明らかにした。結果、星グラフ上において初期値問題と終値問題の両方の枠組で、修正散乱解を構成することに成功した。本結果は青木和貴氏、戌亥隆恭氏、水谷治哉氏、瓜屋航太氏との共同研究であり、論文は Pure and Applied Analysis に掲載済である。

(4) 非線形シュレディンガー方程式の一種であるグロス・ピタエフスキー方程式を、空間遠方での非線形項の減衰オーダーに注目し一般化した方程式を提案した。また、非線形項の減衰オーダーが十分速い場合、初期値問題の枠組で尺度臨界空間において散乱解を持つことを示した。この結果は眞崎聡氏との共著論文として、Differential Equations and Dynamical Systems に掲載受理されている。

(5) 川本昌紀氏との共同研究において、時間減衰する調和振動子を持つ臨界斉次型非線形シュレディンガー方程式において、空間 3 次元以下で解の漸近挙動を決定することに成功した。特に、終値問題の枠組で解が散乱解を持つか、修正散乱解を持つかに対応する非線形項の形状に関する十分条件を与えることができた。本結果は、研究代表者が眞崎聡氏、瓜屋航太氏とともに取り組んだ調和振動子を持たない臨界斉次型非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動に関する結果を、時間減衰する調和振動子を持つ場合に拡張したものである。調和振動子を持たない通常のべき型非線形シュレディンガー方程式では、非線形項が解の漸近挙動に非線形性の影響が現れる臨界べきを持つ場合、非線形項の形状によってその挙動が変化することが知られている。しかし、線形ポテンシャルを持つような線形方程式の解構造が複雑な場合、非線形方程式の解の漸近形を特定することは難しく、先行研究では線形方程式の解表示を得ることができる空間 1 次元の場合の結果がほとんどである。本結果は空間多次元の場合も扱っており、その観点で重要なものといえる。論文は、Journal of Differential Equations に掲載受理され、近く掲載予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Miyazaki Hayato | 4. 巻 41 |
| 2. 論文標題 Strong blow-up instability for standing wave solutions to the system of the quadratic nonlinear Klein-Gordon equations | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 2411 ~ 2445 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2020370 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Miyazaki Hayato, Sobajima Motohiro | 4. 巻 1 |
| 2. 論文標題 Lifespan of Solutions to Nonlinear Schrodinger Equations with General Homogeneous Nonlinearity of the Critical Order | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Advances in Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Trends in Mathematics. | 6. 最初と最後の頁 197-207 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-58215-9_7 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Miyazaki Hayato | 4. 巻 85 |
| 2. 論文標題 Lower bound for the lifespan of solutions to the generalized KdV equation with low-degree of nonlinearity | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics | 6. 最初と最後の頁 303-313 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08510303 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Masaki Satoshi, Miyazaki Hayato | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 Global Behavior of Solutions to Generalized Gross-Pitaevskii Equation | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Differential Equations and Dynamical Systems | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12591-022-00609-8 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Aoki Kazuki, Inui Takahisa, Miyazaki Hayato, Mizutani Haruya, Uriya Kota | 4. 巻 4 |
| 2. 論文標題 Asymptotic behavior for the long-range nonlinear Schrödinger equation on the star graph with the Kirchhoff boundary condition | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Pure and Applied Analysis | 6. 最初と最後の頁 287 ~ 311 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/paa.2022.4.287 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Kawamoto Masaki, Miyazaki Hayato | 4. 巻 365 |
| 2. 論文標題 Long-range scattering for a critical homogeneous type nonlinear Schrödinger equation with time-decaying harmonic potentials | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Differential Equations | 6. 最初と最後の頁 127 ~ 167 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2023.04.009 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 4件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the long-range nonlinear Schroedinger equation on a star graph |
| 3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究の進展」(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the long-range nonlinear Schroedinger equation on a star graph |
| 3. 学会等名 第249回広島数理解析セミナー(招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the long-range nonlinear Schroedinger equation on a star graph |
| 3. 学会等名 大阪大学数学教室微分方程式セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hayato Miyazaki |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the long-range nonlinear Schroedinger equation on a star graph |
| 3. 学会等名 California State University, Fullerton Geometry Seminar（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 斉次型非線形項を持つ非線形シュレーディンガー方程式の修正散乱について |
| 3. 学会等名 香川における偏微分方程式研究会（招待講演） |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hayato Miyazaki |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations 2022（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations 2022 (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 青木和貴, 成亥隆恭, 水谷治哉, 宮崎隼人 (登壇者), 瓜屋航太 |
| 2. 発表標題 Kirchhoff境界条件をもつ星グラフ上の非線形Schroedinger方程式の解の漸近挙動について |
| 3. 学会等名 日本数学会2021年度年会 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the long-range nonlinear Schroedinger equation on a star graph |
| 3. 学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」(招待講演) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long range scattering for the nonlinear Schroedinger equation on the star graph with the Kirchhoff boundary condition |
| 3. 学会等名 Well-posedness Zoomセミナー |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Strong instability for standing wave solutions to the system of the quadratic NLKG |
| 3. 学会等名 大阪大学数学教室 微分方程式セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Hayato Miyazaki |
| 2. 発表標題 Strong instability for standing wave solutions to the system of the quadratic NLKG |
| 3. 学会等名 12th International ISAAC Congress, Session : Harmonic Analysis and Partial Diferential Equations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Strong instability for standing wave solutions to the system of the quadratic NLKG |
| 3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」(招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Strong instability for standing wave solutions to the system of the quadratic NLKG |
| 3. 学会等名 第6回神楽坂非線形波動研究会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 川本昌紀, 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 時間減衰する調和振動子を持つ臨界斉次型非線形シュレディンガー方程式における長距離散乱について |
| 3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 第778回応用解析研究会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 時間減衰する調和振動子を持つ非線形シュレディンガー方程式の長距離散乱について |
| 3. 学会等名 第二回香川における偏微分方程式研究会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) スペクトル・散乱理論とその周辺 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演） |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 ある非線形シュレディンガー方程式の長距離散乱について |
| 3. 学会等名 Takamatsu Mini Workshop on PDE and Geometric Analysis（招待講演） |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 宮崎隼人 |
| 2. 発表標題 Long-range scattering for a homogeneous type nonlinear Schroedinger equation |
| 3. 学会等名 研究会「微分方程式における解の漸近挙動の解析とその周辺」（招待講演） |
| 4. 発表年 2023年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| <p>香川大学研究者情報システム https://www.kards.kagawa-u.ac.jp/profile/ja.49ff58e98528aec6edc27b186c88b5bc.html Hayato MIYAZAKI's Website https://sites.google.com/view/hayato-miyazaki/home</p> |
|---|

6. 研究組織

| | | | |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| | |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|