

令和 5 年 5 月 20 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14583

研究課題名（和文）グラフの生成定理を用いた効率的なグラフ列挙アルゴリズムの構築

研究課題名（英文）Development of efficient graph enumeration algorithms using graph generating theorems

研究代表者

松本 直己（MATSUMOTO, Naoki）

慶應義塾大学・デジタルメディア・コンテンツ統合研究センター（日吉）・特任助教

研究者番号：50747243

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、新たなグラフクラスにおける生成定理の創成およびその応用を中心に研究を行った。これまでに三角形分割と呼ばれるグラフクラスにおいて、様々な条件を満たす三角形分割の生成定理が創成されてきた。本研究課題では、これまでに知られていなかった新しい性質を満たす三角形分割の生成定理を創成することに成功した。また、その得られた生成定理を応用し、二つの三角形分割に特定の局所変形を繰り返し適用することによって同型に出来ることも示した。加えて、これまでに知られていた生成定理を応用し、グラフの不変量などの研究も行い、多くの成果を挙げた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回、新しいグラフクラスの生成定理の創成と生成定理の応用を中心に多くの研究成果を得た。グラフの生成定理は単なるグラフの生成手法としてだけでなく、生成定理を逆に用いることで、ある命題を証明するための数学的帰納法の道具となり、素朴にグラフ構造を記述する方法を超越し、非常に強力な手段となる。実際、今回新しく得られた生成定理も局所変形による同値性を示すために応用されている。今回得られた生成定理および生成定理の応用によって、新しい研究視点や多くの興味深い定理が得られ、グラフ理論の研究に貢献できたといえる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we study the generating theorem of new graph classes and its applications. For various properties of triangulations, many generating theorems for triangulations have been developed. In this study, we could develop a new generating theorem of triangulations with a specified property. We also showed that every such two triangulations can be transformed each other by a local transformation. Moreover, we have proven many results by applying known generating theorems.

研究分野：離散数学

キーワード：グラフ理論 生成定理 局所変形 アルゴリズム

## 1. 研究開始当初の背景

グラフとは、有限個の頂点と辺からなる図形のことを指す。グラフの生成定理とは、『あるグラフの族に含まれるすべてのグラフが、特定の極小なグラフたちから、(数種類の)局所変形を施すことで得られる』という形の命題のことを指す。これまでに様々なグラフの族に対して、その生成定理が証明されてきた。一方で、グラフの列挙問題に対しては、より一般的な構築技法の開発を目指し、生成定理を用いた列挙アルゴリズムの構築が行われてきた。しかしながら、現存の生成手法では頂点数に応じた多くの変形過程が存在するため、一般には生成定理を用いてグラフの列挙を行うと現実的な時間では実行できない。したがって、グラフを生成する際の優先度を考慮し、より効率的な生成過程による生成定理が必要とされてきた。

## 2. 研究の目的

そこで本研究では、生成定理とグラフの列挙アルゴリズムに関するより包括的な理論の構築することが目的である。目的を細分化すると (a) 生成定理のより多くのバリエーションの証明、(b) 各変形操作の優先度を考慮した生成定理の創成、および (c) 生成定理を利用した高速な列挙アルゴリズムの構築である。

## 3. 研究の方法

### (1) 研究目的(a), (b)について

閉曲面上の三角形分割とは、その閉曲面上に辺の交差なく描く(埋め込む)ことができるグラフで各面が三角形となるグラフのことを指す。その閉曲面上の三角形分割をはじめ、位相幾何学的グラフ理論においては多くの重要なグラフの族が存在している。しかしながら、そういった族の中にも、未だに有用な生成定理が見つかっていないものも多く存在している。一方で、私はこれまでにいくつかのマイナー操作(辺の除去、辺の縮約、孤立点の除去)を組み合わせた局所変形による閉曲面上の四角形分割の生成定理など、既存の局所変形を組み合わせることによって新たな局所変形の開発と生成定理の証明を行ってきた経験があるため、その経験を生かし、まだ生成定理が得られていないグラフの族に対して、新たな局所変形を開発とその生成定理の証明を試みる。その過程において、閉曲面上のグラフの不変量を調べることで特定のクラスに属するグラフの性質を整理する。

その後、既存の変形に加えて新たに開発された局所変形に対しても、それらの適用状況を調べ、各変形の優先度を考慮した生成定理の証明に取り組む。そのために、グラフ理論でよく用いられている放電法を利用して、指定された次数を持つ頂点の周辺状況を明らかにし、変形を適用する効率の良い順番(優先度)を用いた生成定理の証明を試みる。加えて、得られた生成定理の応用研究にも並行して取り組む。

### (2) 研究目的(c)について

得られた生成定理を用いて列挙アルゴリズムを構築し、実際に計算機実験によってグラフの列挙を試みる。これまでに数名の研究者によって、平面上の三角形分割を列挙するためのプログラムなどが公開されているため、それらで用いられているプログラミング技法を参考にし、新たに開発した列挙アルゴリズムの実装を行う。

## 4. 研究成果

当初予定していた研究目的(c)の列挙アルゴリズムの開発には至らなかったが、本研究課題実施中に、主に研究目的(a)と(b)に関連して、以下のような研究成果が得られた。

### (1) 三角形分割の Facial achromatic number

三角形分割  $G$  の Facial complete coloring とは、指定された色集合から得られる任意の三つ組がある三角形面に現れるような頂点彩色のことを指し、 $G$  の facial achromatic number とは、その時の色数の最大値を指す。この概念は、これまで長年研究されてきた achromatic number [参考文献 5] と呼ばれる概念から着想を得て、[発表論文 2] において横浜国立大学の 大野由美子氏

と共に新しく提唱した閉曲面上のグラフに対して定義される不変量である．[発表論文 2]において，facial achromatic number に関する多くの基本的な命題を証明した．例えば，与えられた三角形分割における facial achromatic number の（頂点数に依存した）最大値の評価や，三角形分割における点素な面（それぞれが頂点を共有しない面）の個数に関する facial achromatic number の下界の評価などを得ている．

上記に加えて，平面上の偶三角形分割における生成定理を応用し，facial achromatic number がちょうど 3 となる平面上の偶三角形分割を全て特徴付けることにも成功した．この結果は，achromatic number に関する先行研究の一つで，閉曲面上の三角形分割の achromatic number がちょうど 3 となる場合の特徴付けが行われており[参考論文 4]，その結果の facial achromatic number への拡張ともいえる．また，[発表論文 2]をきっかけにして，多くの興味深い問題が生まれ，数多くの関連研究が行われている[参考文献 3，発表論文 3]．

## (2)局所変形による同値性

Wagner[参考文献 10]が平面上の三角形分割の対角変形を研究していた頃から，生成定理と局所変形による同値性（局所変形を繰り返し適用することによって，与えられた二つのグラフを同型なグラフに変形できる性質）には密接な関係があることが知られていた．特に，閉曲面上の三角形分割と四角形分割における局所変形の研究はグラフ・マイナー理論とも関わりがあり，非常に多くの先行研究がある[参考文献 9]．

その中でも，三角形分割における N-flip と呼ばれる局所変形は，グラフの各頂点の次数の偶奇を保存するため，偶三角形分割の同値性を示すために用いられていた[参考文献 6，参考文献 7，参考文献 8]．その先行結果が奇数次数の頂点を，生成定理を創成しそれを応用することで，ちょうど二つだけ持つ三角形分割においても同様に成り立つことを示すことに成功した[発表論文 4]．このとき，偶三角形分割が持つ良い性質の一部が奇数次数の頂点をちょうど二つだけ持つ三角形分割でも成り立つことを確認することができ，これまで取り扱いが難しいとされていた部分に良い知見を与えることができた．これに加えて，三角形面と四角形面が混在しているグラフにおいてより“効率的に”同型になるまで変形するためのアルゴリズムを構築することにも成功している[発表論文 5]．

## (3)三角形分割から局所連結グラフへの拡張

局所連結グラフとは各頂点の近傍が連結グラフを誘導するようなグラフを指す．これまでよく扱われてきた三角形分割は局所連結グラフの一つである．したがって，局所連結グラフで成り立つ定理は三角形分割でも成り立つので，三角形分割の結果を局所連結グラフに拡張するという研究がいくつかの先行研究で行われている[参考文献 1，参考文献 2]．そこで我々は achromatic number と facial achromatic number について，三角形分割で得られていた結果を局所連結グラフへと拡張した[発表論文 1]．この研究は単なる拡張だけでなく，achromatic number と facial achromatic number との関係性についても言及出来ており，(1)の研究をさらに発展させることにも貢献している．

### 【参考文献】

[1] G. Chen, R. Han and S. Songling, Homeomorphically irreducible spanning trees in locally connected graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* 21.1-2 (2012), 107-111.

[2] M. Furuya and N. Matsumoto, A note on the domination number of triangulations, *J. Graph Theory* 79 (2013), 83-85.

[3] N. Haghparast, M. Hasanvand and Y. Ohno, The existence of uniform hypergraphs for which the interpolation property of complete coloring fails, *Discrete Mathematics* 345.3 (2022), 112722.

[4] S. Hara, Triangulations of closed surfaces with achromatic number 3, *Yokohama Math. J.* 47 (1999), 225-229.

[5] F. Harary and S. Hedetniemi, The achromatic number of a graph, *Journal of Combinatorial Theory* 8.2 (1970), 154-161.

[6] K. Kawarabayashi, A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on

surfaces, *J. Combin. Theory Ser. B* 99 (2009), 229-246.

[7] A. Nakamoto, T. Sakuma and Y. Suzuki, N flips in even triangulations on the sphere, *Journal of Graph Theory* 51.3 (2006), 260-268.

[8] A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on the projective plane *Discrete Math.* 308 (2008), 5454-5462.

[9] S. Negami, Diagonal flips of triangulations on surfaces, a survey. *Yokohama Math. J* 47 (1999), 1-40.

[10] K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *J. der Deut. Math. Ver.* 46, Abt. 1 (1936), 26-32.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Matsumoto Naoki, Ohno Yumiko	4. 巻 302
2. 論文標題 Achromatic number and facial achromatic number of connected locally-connected graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 34 ~ 41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20429/tag.2022.090101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naoki Matsumoto, Yumiko Ohno	4. 巻 343
2. 論文標題 Facial achromatic number of triangulations on the sphere	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111651	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Matsumoto Naoki, OHNO Yumiko	4. 巻 9
2. 論文標題 Facial Achromatic Number of Triangulations with Given Guarding Number	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Theory and Applications of Graphs	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.20429/tag.2022.090101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Asayama Yoshihiro, Matsukawa Ryo, Matsumoto Naoki, Nakamoto Atsuhiko	4. 巻 36
2. 論文標題 N-Flips in Triangulations with Two Odd Degree Vertices	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 469 ~ 490
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math7090793	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsumoto Naoki、Nakamoto Atsuhiko、Negami Seiya	4. 巻 283
2. 論文標題 Diagonal flips in plane graphs with triangular and quadrangular faces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 292 ~ 305
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2020.01.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 Chromatic number of triangle-free and broom-free graphs in terms of their order
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 グラフの連結度に関するゲーム的不変量
3. 学会等名 RIMS共同研究 (グループ型A) 「グラフの局所構造の制限が与える不変量への影響」 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 向き付け可能閉曲面上の三角形分割の被覆時間について
3. 学会等名 第33回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 3-染色的三角形分割上の帰還ゲームについて
3. 学会等名 第32回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 曲面上の三角形分割における Bichromatic coloring game
3. 学会等名 第31回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 グラフ上の組合せゲーム
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会 特別セッション「ゲームと数理」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 直己
2. 発表標題 Graph grabbing gameにおける禁止部分グラフ条件
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2019 (JCCA2019, SGT8)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------