

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：82401

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2023

課題番号：19K14588

研究課題名（和文）反応拡散系のパターンダイナミクスに対する非一様性・非局所性との関係

研究課題名（英文）Relation between spatial heterogeneity and nonlocality for pattern dynamics of reaction-diffusion systems

研究代表者

関坂 宏子（Sekisaka-Yamamoto, Hiroko）

国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・上級研究員

研究者番号：10759153

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、空間的非一様性や非局所性を持つ反応拡散系に対して、パターンと空間的非一様性および非局所性との関係を調べた。空間的非一様性に対しては、点凝集定常解というスパイク状の形をもつ解を扱い、その極大点の位置が、方程式の係数から構成される位置決め関数の臨界点に収束することを証明した。

また、畳み込み積分を含む反応拡散方程式に対する反応拡散近似を行った。畳み込み積分に含まれる積分核を一般の連続関数に拡張できることを示した。これらの反応拡散系の解に対する安定性問題を考え、Evans関数が構成できることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間的非一様性を含む反応拡散方程式に対する点凝集現象に関する研究は、数学的にも応用上も重要である。生物の発生過程において、幾何学的な情報よりも環境の非一様性の方が影響が大きいことを表している。また、非局所反応拡散方程式に対して、領域全体での積分を含むので、従来の解析法を使うことができない場合があり、新たな解析法の確立が必要である。非局所反応拡散方程式の反応拡散近似は新たな解析法の一つであり、解の挙動や安定性を調べる時に有用と考えられる。Evans関数の構築は、様々な進行波解、例えば2つの進行波を組み合わせた進行波の安定性解析にも適用可能であり、汎用性が高炒め有用であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we studied the relation between patterns and spatial heterogeneity or nonlocality for reaction-diffusion systems with spatial heterogeneity or nonlocality. For the spatial heterogeneity, we treated spike-shaped solutions called concentration phenomena and proved that the location of the maximum converges to the critical point of the locator function consisting of the coefficients of the equation.

We also approximated solutions of reaction-diffusion equations involving convolution integrals by the first component of solutions to reaction-diffusion systems. We proved the reaction-diffusion approximation of the nonlocal reaction-diffusion equation in the case that the kernel of the convolution integrals is a general continuous function. We considered stability problems for solutions of these reaction-diffusion systems and proved that the Evans functions can be constructed.

研究分野：非線型偏微分方程式

キーワード：反応拡散系 非局所反応拡散方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

生物の形態形成の発生過程を再現するために、1972年ギーラーとメインハルトにより、活性因子と抑制因子と呼ばれる2つの生化学物質から成る反応拡散系が提唱された。彼らは活性因子が多く集まる場所から形成が始まるという仮説を立て、数値計算によりスパイク状のパターン(非自明解)が現れることを観測した。彼らの仮説は実験的にも数学的にも検証され、パターンの形成過程を説明できるようになってきた。また、反応拡散系は様々なパターンを持つことがよく知られているが、このような様々なパターンがある中で、どのようなパターンが現れるかを予測することが求められている。

2. 研究の目的

本研究では、空間的非一様性や非局所性を持つ反応拡散系に対して、現れるパターンと、空間的非一様性および非局所性との関係を明らかにする。系が環境に依存する場合や系の中に大域的な影響が含まれる場合には、系の中に関数として空間的非一様性や非局所性が含まれていることが考えられる。本研究を通して、空間的非一様性や非局所性が、反応拡散系の解の挙動やパターンダイナミクスにどのように影響するのかを明らかにすることを目標とする。これにより、空間的非一様性や非局所性を利用して、様々なパターンの中から、ある一つのパターンが選択される仕組みや制御する方法を模索したい。

3. 研究の方法

空間的非一様性や非局所性を持つ反応拡散系のパターンダイナミクスを理解するために、本研究では、

- (1) 反応拡散系の解の存在、解の挙動、および安定性解析、
 - (2) 反応拡散系の解と空間的非一様性および非局所性との関係を調べる、
- の2つの課題について取り組む。解の存在や挙動は、どのようなパターンが考えられるかを導出する必要があり、また安定性解析については安定性・不安定性のどちらもダイナミクスを調べるとい点においては重要である。空間的非一様性を調べる際には、活性因子・抑制因子系の点凝集解への影響について変分法等を用いて明らかにする。非局所性に関しては、畳み込み積分を含む非局所反応拡散方程式に対する反応拡散近似により、多成分の反応拡散系との関係を調べる。これに関する安定性問題に関しても、方程式に含まれる畳み込み積分に対して関数解析で用いられるスペクトル解析が利用できるかどうかを調べる。

4. 研究成果

上記の2つの課題に対して、安定性解析と、空間的非一様性および非局所性との関係について得られた結果を述べる。これらの結果は理論の構築や拡張にとどまっておらず、実際、応用例に適用して検証するまでには至っていないため、これに関しては今後取り組むべき問題である。

- (1) 空間的非一様性を含む反応拡散方程式に対する点凝集定常解の存在
空間的非一様性として空間変数に依存した係数を含む、反応拡散方程式に対する点凝集定常解の存在を証明した。これまでは、位置決め関数という方程式に含まれる係数から構成される一つのパターンの最小点の近傍に集中するような定常解が知られているが、本研究では、点凝集定常解が存在して、領域の内部に極大点を持つ場合に、その極大点が位置決め関数の臨界点に収束することを示した。逆に、領域の内部にある位置決め関数の非退化臨界点において、その近傍に集中するような点凝集定常解が存在することを証明した。よって位置決め関数により、点凝集定常解に対する空間的非一様性の影響を表すことができた。

- (2) シリンダー領域における反応拡散系の進行波解に対する安定性問題
有界領域と1次元Euclid空間の直積で表されるシリンダー領域において、反応拡散系の進行波解に対する安定性問題を考察した。有界領域に対しては一般の斉次境界条件を課し、Deng・新居(JDE, 2006)の結果を拡張することに成功した。安定部分空間と不安定部分空間の交差を図るEvans関数を構成し、Evans関数が単連結有界領域上から複素数全体への解析関数となることが得られた。また、線型化作用素の固有値であることとEvans関数の零点になることの同値性も示し、固有値の重複度とEvans関数の0点での代数的重複度と一致することを示した。本研究は、明治大学の関坂歩幹氏との共同研究である。

- (3) 非局所反応拡散方程式の反応拡散近似の改良
畳み込み積分を含む非局所反応拡散方程式の初期値問題に対して、ある多成分の反応拡散系の

解の第一成分により、解を近似できることを証明した。先行研究では、畳み込み積分に含まれる積分核の関数として偶関数かつ正値関数である必要があったが、この条件を一般の連続関数に緩和することに成功した。積分核を近似する際に用いる関数列は、非斉次項を含む2階楕円型偏微分方程式の基本解である。本研究では、方程式の非対称性と幾つかの係数を適切に選ぶことにより、一般の連続関数を近似することが可能となる。この近似には、可算無限個の関数列を用いるため、積分作用素が無限次元の作用素であることを本質的に用いることになる。このため、積分核の近似の際に、関数列の個数が非常に多い場合には、今回近似に用いた反応拡散系では、非局所反応拡散方程式の解への収束を示すことができないことも分かった。これについては、積分核の近似方法も含めて改良の必要があることが分かった。また、周期境界条件を課した場合の非局所反応拡散方程式について、数値計算も行った。特に、積分核が偶関数でない場合には、非常に複雑なパターンを観測した。本研究については、明治大学の関坂歩幹氏との共同研究である。

(1)の点凝集定常解の研究および(3)の非局所反応拡散方程式に関する研究を行う中で、副産物として下記の結果を得た。どちらの研究も特異摂動法を用いており、その解析手法を他の偏微分方程式に適用して得た結果である。

(4) 消散型半線型波動方程式の反応拡散近似

本研究では、半線型波動方程式、および時間に関する1階の偏導関数による消散項を含む半線型波動方程式に対する初期値問題の解に関して、2成分の反応拡散系の解により近似できることを証明した。波動方程式は時間に関して2階の偏導関数を含む方程式であるが、これを時間に関する微分回数を1回ずつ2成分に分けて、波動方程式の性質を近似した。

(5) 星間ガスの自己重力不安定と中心多様体縮約

自己重力作用を持つ圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して、密度一定の静止平衡解が重力崩壊により不安定化する問題に取り組んだ。この問題は、星間ガスの内部圧力と自己重力の均衡状態が僅かな密度揺らぎと自己重力により均衡が崩れ不安定化するという、恒星の核となる部分の発生過程を表す問題である。この方程式の固有値問題に対して不安定化する固有値を調べ、その後、中心多様体縮約により縮約方程式の主要部を導出し、分岐やパターンについて調べた。得られたパターンはポリトロープ指数に応じて指数増大する場合、対称性のあるパターン、層状のパターンのある場合の3つに分類でき、指数増大する場合が恒星の核ができる場合に対応する。本研究については、明治大学の関坂歩幹氏との共同研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Sekisaka-Yamamoto Hiroko	4. 巻 39
2. 論文標題 A reaction-diffusion approximation of a semilinear wave equation with damping	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 921 ~ 941
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-022-00536-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Ninomiya Hirokazu, Yamamoto Hiroko	4. 巻 272
2. 論文標題 A reaction-diffusion approximation of a semilinear wave equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 289 ~ 309
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2020.09.031	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sekisaka Ayuki, Yamamoto Hiroko	4. 巻 403
2. 論文標題 Instability in the nebula model of compressive viscous gases	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6. 最初と最後の頁 132290 ~ 132290
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2019.132290	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 7件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 関坂（山本）宏子
2. 発表標題 非局所反応拡散方程式に対する反応拡散近似
3. 学会等名 日本応用数理学会年会，正会員主催 OS「界面運動の数理」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関坂歩幹, 関坂(山本)宏子
2. 発表標題 シリンダー領域の反応拡散方程式のスペクトル問題とEvans関数
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 応用数学分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関坂(山本)宏子
2. 発表標題 非局所反応拡散方程式の反応拡散近似
3. 学会等名 第37回埼玉数理解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関坂歩幹, 関坂(山本)宏子
2. 発表標題 反応拡散系の変調進行波解に対する -固有値問題と Evans 関数
3. 学会等名 応用数学会同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山本宏子
2. 発表標題 波動方程式に対する反応拡散近似
3. 学会等名 第5回反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 非局所反応拡散系の進行波解に対する安定性解析
3. 学会等名 2021年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山本宏子
2. 発表標題 半線型波動方程式に対する反応拡散近似
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 非局所反応拡散方程式に対するEvans関数(The Evans function for reaction-diffusion equations with nonlocal effects)
3. 学会等名 日本数学会年会(応用数学科分会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 H. Yamamoto
2. 発表標題 A reaction-diffusion approximation of a semilinear wave equation
3. 学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 非局所発展方程式に対するEvans関数
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山本宏子
2. 発表標題 いくつかの偏微分方程式に対する反応拡散近似
3. 学会等名 数学と諸分野の連携に向けた若手数学者交流会2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 星間ガスの自己重力不安定と中心多様体縮約
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 星間ガスの自己重力不安定と縮約方程式
3. 学会等名 軽井沢グラフと解析研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 星間ガスの自己重力不安定化に対する縮約方程式
3. 学会等名 福島発展方程式討論会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関坂歩幹, 山本宏子
2. 発表標題 自己重力作用のある圧縮性粘性ガスの Jeans 不安定性
3. 学会等名 界面現象の数理・モデリング研究合宿 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山本宏子
2. 発表標題 波動方程式に関する反応拡散近似
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear PDE in Numazu (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------