

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K14613

研究課題名（和文）ランダム幾何グラフに対する平均場理論の構築と数理モデルへの応用

研究課題名（英文）Mean-field theory for random geometric graph and its application to mathematical models

研究代表者

高邊 賢史（Takabe, Satoshi）

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：60804218

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、ユークリッド空間上で定義されるランダム幾何グラフ上の数理モデルの理論的解析手法として、ランダム系の統計力学に基づいた平均場理論を構築することを目的とした。具体的な成果としては、(1) 一般化ランダム幾何グラフと呼ばれる広いランダム幾何グラフのクラスに対して適用可能な次数相関に関する統計力学的解析と、(2) アドホックネットワーク上の無線通信におけるネットワーク頑健性モデルの平均場解析を行ったことが挙げられる。特に、後者については有限ノード数における頑健性を予測可能となり、数値シミュレーションの結果をよく再現することを確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム系の統計力学は幾何構造を有しないランダムグラフに対してよく適用されていたが、本研究ではそれをランダム幾何グラフへ応用することで、新たな解析手法の確立に寄与したといえる。また、ランダム幾何グラフは無線通信や感染症等の数理モデルとして自然に現れることから、本研究で提案する解析手法はこれらの応用分野にも適用可能であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this study, we aimed to construct an mean-field theory for mathematical models on random geometric graphs defined on the Euclidean space, based on the statistical mechanics for disordered systems. As a result, we have studied the following research topics: (1) the statistical-mechanical analysis of the degree correlations applicable to generalized random geometric graphs, a wider class of random geometric graphs, and (2) mean-field analysis of the robustness in ad-hoc wireless communication models. Especially, the latter enables the estimation of robustness on graphs with finite nodes, which predicts numerical simulations well.

研究分野：情報統計力学

キーワード：情報統計力学 ランダムグラフ ランダム幾何グラフ アドホックネットワーク

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 2000 年代初頭から複雑ネットワークをはじめとするランダムグラフ上の統計力学がランダム系の統計力学の一種として注目を集め続けている。このランダムグラフは、ノードの空間構造を問わない「幾何構造を有しないランダムグラフ」である。ランダムグラフ上の統計力学は母関数法やキャピティ法といった平均場近似に基づく。平均場近似はパーコレーション転移を始めとするグラフの大域的性質だけでなく、グラフ上に定義されるスピン模型、最適化問題や感染症模型 (SIR 模型等) など、広範な数理モデルの相転移現象とグラフの平均次数 (各ノードに接続する辺の本数の平均値) や次数分布といったグラフのパラメタとの関係性の解明に貢献してきた。しかし、ランダムグラフでは空間構造 (ノード間の距離) を無視するため、無線通信における電波干渉・距離減衰や感染症の空間内拡散・感染者との接触等に代表される現実の系をモデル化するには不十分な状況がしばしば出現する。

(2) ユークリッド空間上において定義される「幾何構造を有するランダムグラフ」(以下、ランダム幾何グラフ) は、ノードが空間内に確率的に配置され (点過程) ノード間の距離に応じて確率的な辺の接続が行われることでグラフが生成される。このように、ランダム幾何グラフは無線センサネットワーク (WSN) や感染症の拡大といった現実の系を記述するランダムグラフ模型として重要である。さらに、それらの確率過程はノード間に特有の相関を生じさせ、系の短/長距離相互作用の強さを変化させる。このため、例えば空間構造のない感染症モデルで知られた相転移描像がランダム幾何グラフ上では成立しないなど、空間構造の導入により系の相転移描像が非自明に変化することが知られている。それにも関わらず、ランダム幾何グラフの解析は有限系に対する数値シミュレーションと単純な系に対する確率論的漸近解析に限定されており、適用範囲の広い統一的な解析手法の確立が求められている。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、ユークリッド空間上で定義されるランダム幾何グラフ上の数理モデルの理論的解析手法として、ランダム系の統計力学に基づいた平均場理論を構築する。特に、一般化ランダム幾何グラフと呼ばれる広いランダム幾何グラフのクラスを扱うことでより広い応用分野へ適した理論の構築を目指す。

(2) 従来は限定的状況での確率論的漸近解析や数値計算に依拠していた、ランダム幾何グラフ上の数理モデルの相転移現象と空間構造との関係の解明を目指す。また、有限系に対して近似精度の良い解析手法の確立を行い、それを応用することで平均場近似を基にしたネットワークの制御・予測手法を提案する。

3. 研究の方法

(1) はじめに、ランダム幾何グラフに対する最も単純な近似として、グラフ内の次数 - 次数相関等を無視した WSN の連結性に関する確率的/統計力学的な解析を行い、特にノード数無限大の極限における相転移現象を解明する。

(2) 次に、ランダム幾何グラフ上特有の性質である、距離構造によって誘導されるグラフ内の相関を平均場近似により明らかにする。これにより、ランダム幾何グラフの種類と相関との関係性を理論的に明らかにする。

(3) 最後に、具体的な数理モデルとして、WSN のようなアドホック無線ネットワークにおけるノード故障モデルを取り上げ、その連結性に関する統計力学的解析を行う。この際に、(2) で得た知見を取り入れることで、有限ノード数においてより高い近似精度の解析を行うことを目指す。

4. 研究成果

(1) 一般化ランダム幾何グラフにおける WSN ノード故障モデルの連結性に関するグラフ内相関を無視した解析

ランダム幾何グラフは、一定領域内にポアソン点過程等の点過程に従って分布したノード間に、独立にそのユークリッド距離に応じた確率で辺を設置するランダムグラフモデルである。ランダム幾何グラフの代表的な例は、ノード間の距離が一定値以下なら辺を設置し、それ以外は設置しないハードディスクモデルであるが、これは応用上現実的でない。そこで、本研究では、辺を設置する確率がノード間距離の一般の関数で定まるような一般化ランダム幾何グラフを対象とした。(1) では「0 次近似」として、この一般化ランダム幾何グラフにおける各種相関を無視

した確率的/統計力学的な平均場近似を行い、WSNの連結性解析を行った。既存の解析と異なり、本研究成果では、ノード間の通信方式(送受信アンテナ数に応じて、SISOやMIMOとなる)による接続確率の違いが、ノード数無限大極限におけるネットワークの頑健性の相転移の閾値に陽に影響を及ぼすことを解析的に示した点が特徴的である。

(2) 一般化ランダム幾何グラフの次数相関の平均場解析

(1)の解析は漸近的に数値シミュレーションとよく一致するものの、有限ノード数における予測精度はあまり高くないという問題点が存在した。その原因は、(1)の平均場解析が次数相関等のグラフ内部の相関を無視しているためであると考えられる。また、次数相関は一般化ランダム幾何グラフの性質を明らかにする上でも重要であるといえる。そこで、平均場近似の手法により、一般化ランダム幾何グラフの一般的な次数相関の表式を明らかにすることを目指した。結果として、次数相関やクラスタリング係数がノード数とノード間の接続確率を記述する関数で表せることを見出した。図1にある一般化ランダム幾何グラフにおける隣接次数(ある次数のノードに隣接するノードの次数分布)を示す。ここで、丸が数値シミュレーション結果を表し、×印と直線がそれぞれ有限ノード数における平均場理論とそのノード数無限大極限における隣接次数分布の見積もりを表す。図から明らかのように、平均場理論は実際の次数相関をよく再現している。また、グラフの幾何構造が自然に次数相関等の相関を誘導しており、次数相関はノード間の接続確率を記述する関数のモーメントに依存することが理論的に明らかとなった。

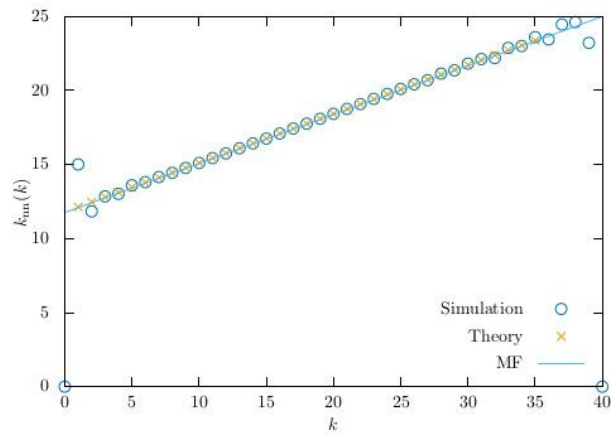


図1. 一般化ランダム幾何グラフにおける隣接次数分布 ($N=4096$ ノード)。

(3) 次数相関を取り入れたWSNノード故障モデルの連結性に関する平均場解析

ここでは(2)で明らかとなった一般化ランダム幾何グラフの次数相関を取り入れた平均場近似手法を構築し、(1)のWSNノード故障モデルへの応用を目指した。解析手法としては、WSNノード故障モデルを一般化ランダム幾何グラフ上のランダムなノード除去としてモデル化し、それを次数相関を考慮した確率伝搬法(キャピティ法)によって近似計算した。ランダムグラフ平均を取り、有限ノード数において成立する閉じた方程式系を得た。図2に同モデルにおけるネットワーク故障確率(ネットワークの連結性が失われる確率)と各ノードの故障率の依存性を示した。シンボルが数値シミュレーション結果を、実線が平均場近似による見積もりを表す。図からわかるように、平均場近似の結果はやや実際の値とずれが生じているが、これはクラスタリング構造、ひいてはグラフ内の密なサイクル構造に起因したものであると考えられる。また、平均場近似から得られる方程式系の漸近的な性質を解析することが困難であるという問題点が生じた。いずれにせよ、本研究の成果として一般化ランダム幾何グラフにおける数理モデルの振る舞いを定性的かつある程度定量的に予測することが可能な平均場近似を構築することができた。

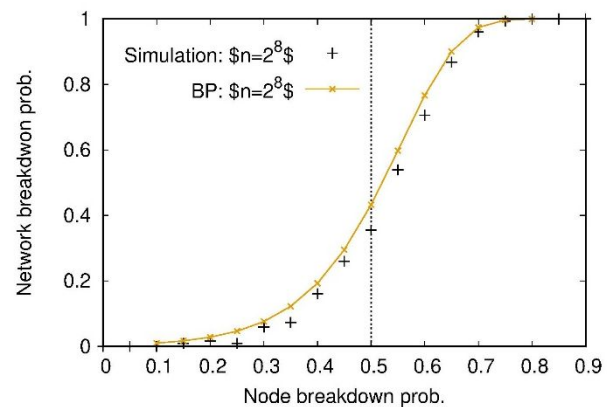


図2. WSNノード故障モデルにおけるネットワーク故障確率のノード故障率依存性 ($N=258$ ノード)。

(4) その他

その他の成果として、グラフデータからの特徴量抽出の一種であるグラフ埋め込みの拡張や高速化に関わる研究、無線ネットワーク等の信号処理に関わる学習可能アルゴリズムの開発が挙げられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takabe Satoshi, Wadayama Tadashi	4. 巻 8
2. 論文標題 Approximation Theory for Connectivity of Ad Hoc Wireless Networks With Node Faults	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Wireless Communications Letters	6. 最初と最後の頁 1240 ~ 1243
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/LWC.2019.2912610	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takabe Satoshi, Nakano Takafumi, Wadayama Tadashi	4. 巻 99
2. 論文標題 Fault tolerance of random graphs with respect to connectivity: Mean-field approximation for semidense random graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 50304
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevE.99.050304	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 高邊 賢史, 和田山 正	4. 巻 J103-A
2. 論文標題 確率的なノード故障が生じる無線センサネットワークの連結性の相転移現象	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 電子情報通信学会論文誌 A	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 3件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 高邊賢史, 和田山正
2. 発表標題 一般化ランダム幾何グラフにおける次数相関の解析
3. 学会等名 日本物理学会秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高邊 賢史
2. 発表標題 確率的なノード除去に伴うランダムグラフの連結性の相転移現象
3. 学会等名 水戸数学情報数理論研究会2019「連結の数理」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高邊 賢史
2. 発表標題 アドホックネットワークのランダムノード故障 連結性の理論解析
3. 学会等名 ネットワーク科学研究会2022(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 永里和哉, 高邊賢史, 首藤一幸
2. 発表標題 ランダムウォークを用いたハイパーグラフの埋め込み手法
3. 学会等名 ネットワーク科学研究会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 永里和哉, 高邊賢史, 首藤一幸
2. 発表標題 遷移確率を調整したランダムウォークに基づくハイパーグラフ埋め込み
3. 学会等名 第15回データ工学と情報マネジメントに関するフォーラム
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------