

令和 5 年 5 月 25 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究

研究期間：2019～2022

課題番号：19K20214

研究課題名（和文）非線形なopinion dynamicsに対する収束時間解析

研究課題名（英文）Analysis of consensus times for non-linear opinion dynamics

研究代表者

白髪 丈晴（Shiraga, Takeharu）

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：50803996

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では2-choices dynamicsと呼ばれるのシンプルな確率的モデルの解析を行う。このモデルは従来モデルの単純な拡張にも関わらず特定のグラフ構造上において高速に単一意見への収束が起こるといふ、基本的な分散計算に好ましい性質を持つ一方、一般のグラフ構造上で分かっていることは少なかった。

本研究ではコミュニティ構造を表現するグラフ(stochastic block model)上では収束時間に相転移が存在し、収束に指数時間要する例を示した。更に、高速な収束の為の意見更新規則に求められる特徴を多数決の観点から特徴付けし、エクスペンダーグラフ上における対数合意時間を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

単純、局所的なルールに基づくシステムはその理解、利用のし易さに留まらず、管理・保全を含めた多くの柔軟性を包含する。単純性というある意味で“制限された”環境下におけるシステムがどの程度の計算能力を持つかという問いは、理論的にも所望の問題に対して必要な資源を明確にするという意味で需要が大きい。本研究で明らかになった2-CHOICESを含めた局所的な更新規則とその威力は既存研究を大きく一般化するものであり、得られた解析技法は研究対象となったルールに留まらず、ランダムウォークを始めとした他の有用な確率モデルへも適用されつつあり、その意義は大きいと言える。

研究成果の概要（英文）：We study a simple probabilistic model called 2-choices dynamics (2-CHOICES). While the differences between the model and existing models are slight, 2-CHOICES shows rapid convergence to a single opinion on specific graph structures, making it desirable for basic distributed computation. However, little is known about its behaviour on general graph structures. We showed the existence of a phase transition in convergence time on graphs representing community structures (stochastic block model) and provided an example where exponential time is required for convergence. We also characterised the requirements for opinion update rules that allow fast convergence from a majority voting perspective and presented logarithmic consensus time on expander graphs.

研究分野：アルゴリズム理論

キーワード：分散投票モデル マルコフ連鎖

### 1. 研究開始当初の背景

本研究では、主に以下で記述する **voter dynamics** (以下, **VOTER**と記述), **2-choices dynamics** (以下, **2-CHOICES**と記述)と呼ばれるネットワーク上で定義される単純な確率モデルを扱う. 頂点集合 $V$ , 枝集合 $E$ からなる連結無向グラフ $G = (V, E)$ で, 各頂点 $v \in V$ が「0」もしくは「1」の意見(状態)を保持しているもの考える. このとき, グラフ上の各頂点が, それぞれ(1)自身の隣接点から1つを一様ランダムに選び, (2)自身の現在の意見を選んだ頂点の意見に更新する, という単純な確率的なモデルを考える(図1). このモデルが **VOTER** と呼ばれ, (2部グラフを除く)任意のグラフ構造・意見の初期状態に対し, 頂点数の多項式時間で全頂点の意見が一致した状態へ収束し, かつ「収束先の意見が0/1である確率」は「初期状態における0/1から出る枝の数」に比例することが示されている[CR16, HP01]. 確率的, また局所的な動作の強みとして, これらの性質はプロセスの故障のような動的な環境下においても特徴づけが行われており, **VOTER**は合意問題や多数決, 誤り訂正といった分散計算における基本的な問題への応用に望ましい性質を持っていると言える. 興味深いことに, **VOTER**の収束時間は複数粒子によるランダムウォークの合流時間と双対の関係にあることが示されている. 合流時間は乱歩による情報の収集やリーダー選挙を考える際に重要な特徴量であり, 全訪問時間といった他の主要な特徴量との関係が離散数学の著名な国際会議で発表される予定など大きな注目を浴びている[KMS19].

さて, 近傍から「1回」意見のサンプルを行う **VOTER**に対し, 近傍から「2回」一様ランダムに意見のサンプルを行い, 自身の意見と合わせた3つの意見の多数決をとり意見の更新を行う **2-CHOICES**について近年活発に研究が行われている(図1). 特筆すべき性質として, 完全グラフ上において **VOTER**の収束時間が頂点数 $n$ に対し $\Theta(n)$ であるのに対し, **2-CHOICES**の収束時間は高確率で $O(\log n)$ であることが示されている[DG11]. 即ち, **局所的ルール**の**単純な変更により, 収束時間という大域的な性質が大きく変化**することを示唆している. 後にこの成果はグラフが十分密ならば部分的に成り立つことが[CER14]や研究代表者ら[CER+15]により示されている.

**VOTER**, **2-CHOICES**のような, 「近傍との相互作用により自身の状態(意見)を変化させていく」モデルは総称して, **Opinion dynamics** と呼ばれる. 分散環境下での自律的な確率的計算モデルとしてのみならず, ソーシャルネットワーク上での意見の伝播, 統計物理, 自然界における自律的な個体群の振る舞い, ニューラルネットワーク等, 複数の対象のモデル化として広く研究されている[CNN+18, CNS+18].

ここで, **Opinion dynamics** 研究に対する理論計算機科学の観点からの自然な問いは, どのような局所的ルールが所望の大域的な性質(例えば収束性)を実現するか, という点である.

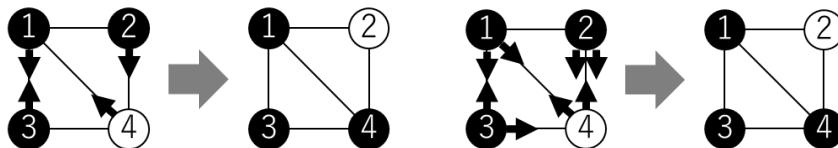


図1: **VOTER** (左)と**2-CHOICES** (右). 数字は頂点番号を, 白/黒で0/1を表す.

2-CHOICESの威力が完全グラフ上で証明された後, 3種類以上の意見, 近傍を3回サンプルし多数決をとるルール(3-MAJORITYと呼ばれる. このモデルものに述べる通り積極的に研究が為されている)に対してなど一連の研究[BCE+17, BCN+16, GL18]が為され, それぞれが理論計算機科学における著名な国際会議で報告されてきたが, それらほぼ全ては「完全グラフ上」で行われており, 一般のグラフ構造上で理論保証が為されている **VOTER**に対し, 一般のグラフ構造上の**2-CHOICES**について分かっていることは少ない. 例えばエキスパンダーグラフのような, 完全グラフに近いと考えられる構造上でさえ, 初期状態において両意見の数が同じ状態からの収束時間について, 対数時間か, 多項式時間か, **VOTER**より早いかどうかさえも未解決である.

これは, **VOTER**の持つ「線形性」という, 一般のグラフ構造上での解析において重要な役割を果たす性質が**2-CHOICES**に当てはまらないことに起因している. 線形性とは, 意見の状態を $\{0, 1\}$ ベクトルで表した際, 確率的に選ばれた $\{0, 1\}$ 行列を掛け合わせることで次の時刻での意見の状態を表すことが出来る, という性質である. **VOTER**を含む線形性を持つルールに関しては[CR16]において統一的に収束時間解析が為されているが, 線形という枠組みを超えたルールに関してはほぼ行われておらず, **2-CHOICES**のように**VOTER**の単純な拡張に見えるものでも, 解析の困難さから殆どの研究が完全グラフ上で行われている現状である.

### 2. 研究の目的

ここまでの背景を踏まえ, 以下に本研究の目標を明示する:

1. これまで主に**完全グラフ上**で行われてきた**2-Choices**の研究を**一般のネットワーク上へ昇華**させる
2. **線形**という枠組みでくることが出来ず, 個別に研究されてきたモデルに対し**統一的な解析技法**を与える

### 3. 研究の方法

ここでは具体的な研究のアプローチを述べる。研究代表者がこれまで行ってきた一般のグラフ構造における部分的な成果[CER+15, CRR+17], 連続量の拡散と離散量の拡散のギャップ解析を活かし, 以下の具体的な[研究課題 1, 2, 3]を推進することで目的の達成を目指す。

#### [研究課題 1. 密な構造上での 2-CHOICES の収束時間の上下界の導出]

ランダムグラフ  $G_{n,p}$ , エキスパンダーグラフといった重要かつ「完全グラフとの近さ」を  $p$ , 第二固有値といったパラメータで表すことのできる構造に対し, 意見が半々から始まった際の収束時間の上下界を導出する。  $G_{n,p}$  は各頂点間の辺が確率  $p$  で存在するグラフであり, エキスパンダーグラフはグラフの隣接行列の第二固有値  $\lambda_2$  が十分小さなグラフと定義される (直感的には,  $\lambda_2$  は 0 に近いほどコンダクタンスの意味で完全グラフに近い)。これらパラメータを動かした際の収束時間の変化を明らかにする。

#### [研究課題 2. 密な部分と疎な部分を併せ持つ構造上の 2-CHOICES の収束時間の上下界の導出]

$G_{n,p}$  の拡張であり疎な部分を含む, stochastic block model  $G_{2n,p,q}$  を扱う。このモデルは 2 つの頂点集合  $V_1, V_2$  からなり, 同じ頂点集合間の枝は確率  $p$  で, 異なる頂点集合間の枝は確率  $q$  で存在する。既存研究[CNS+18]では解析の都合上 stochastic block model の正則性, 初期状態における意見のばらつきの変換という非常に限られた状況下で解析を行っているが, 本研究ではこれらの仮定を除き, 一般に Stochastic block model  $G_{2n,p,q}$  上で,  $p, q$  を動かした際の収束時間の変化を明らかにすることを目指す。

#### [研究課題 3. 連続値モデルの導入による非線形モデルに対する統一的な解析技法の構築]

非線形なルールに対する特徴づけと統一的な解析技法の構築を目指す。解析のアイデアとして, 意見が 0 もしくは 1 という今回扱っているモデルと, 線形性に似た性質を保ち, 比較的解析が容易と考えられる「意見が 0 以上 1 以下の連続値で表されるモデル」を導入し, 両者の比較を行うことを考える。応募者はこれまでグラフ上での離散量と連続量の拡散の差の研究に従事しておりこの活用を試みる。

### 4. 研究成果

上記のアプローチ, またそれらを多角的に推進した結果, 以下の具体的な成果を得た。ここでは得られた主要な成果を大きく 3 分類し詳説を行う。

#### [研究成果 1. コミュニティグラフ上における相転移現象 ([NS21, RS&A])]

代表的な非線形 opinion dynamics である 2-CHOICES, さらに 3-MAJORITY に対し, stochastic block model (SBM) 上においてその性質の部分的な解明に成功した。具体的には, コミュニティ内の辺密度  $p$  とコミュニティ間の辺密度  $q$  の比  $q/p$  がある定数  $r^*$  より小さい場合, 即ちコミュニティ間を結ぶ辺がコミュニティ内を結ぶ辺と比べて少ない場合, 2-CHOICES/3-MAJORITY は合意に指数時間かかり,  $r^*$  より大きい場合, 対数時間で合意がおこることを示した。既存研究では  $r^*$  がグラフのサイズ  $n$  に依存する極端に小さい場合の振舞しか扱っておらず,  $r^*$  が定数でも指数時間の下解が存在することは直観を裏切る例の発見となった。また,  $r^*$  が定数の場合, コミュニティ間の関係が深くなることから解析は困難となり, 2 次元の力学系の挙動を明らかにする必要があったが, これを monotone dynamics の技術を導入することで解決することに成功した。関連研究でこの技法による解析は例を見ず新しく, 今後の展開が大いに見込まれる。研究成果は国際会議 International Symposium on Distributed Computing (DISC 2019) に採択され, その後ジャーナル Random structures and algorithms に掲載された。

#### [研究成果 2. 非線形な Opinion dynamic の特徴づけと解析 ([NS20, ICALP 2020])]

二つ目の成果では, opinion dynamics が高速に合意するために意見の更新ルールに求められる特徴を調べた。そして, 意見更新が自身の近傍の意見の“多数決”に近い形で行われる場合, 合意が頂点数の対数時間で起こることを示した。これまでの研究は, 2-CHOICES, 3-MAJORITY など特定のルールに関しそれぞれ別の解析技法での合意時間解析に終始していたことを考えた際, 本研究で行った意見更新のルールを近傍の意見の関数としての定義, 関数の特徴づけから与えた一般的な解析技法のインパクトは大きく, この研究成果が International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2020) に採択された。より具体的には, 同様の思想を持つ研究として linear voting model と呼ばれる線形なプロセスに関し, 更新を行列を用いて表現し解析を行った一般的な枠組みが知られていたが, “非線形な”モデルに関しての特徴づけと対数収束時間の保証は本研究が初であり, これまで個々に進められてきた研究を大幅に一般化・改良することに成功している。例えば, 我々のモデルは“ $k$  回近傍を乱択し多数決をとる”といったものも含み, それに対し,  $\Theta(\log n / \log k)$  時間での収束時間も保証している。この成果による副産物として, 定数個の近傍乱択では対数収束時間を破ることは不可能であることが示されたことになる。

#### [研究成果 3. 動的グラフ上における VOTER の解析 ([NS23 RS&A, accepted])]

より一般的な環境の設定として, 動的なグラフ上における投票者モデルの収束時間とランダムウォークの合流時間の特徴づけを行った。動的なグラフ上での意見の収束に対して為されている研究は少なかったが, この成果により, ランダムウォークという代表的な確率モデルの解析と投票者モデルが動的なネットワーク上においても結びつき, より柔軟な解析技法の進展が期待できるようになったと言える。成果はジャーナル Random structures and algorithms に採択された。

参考文献:

- [BCE+17] P. Berenbrink, A. Clementi, R. Elsässer, P. Kling, F. Mallmann-Trenn, E. Natale, Ignore or comply? on breaking symmetry in consensus, Proc. PODC 2017, 335-344.
- [BCN+16] L. Becchetti, A. Clementi, E. Natale, F. Pasquale, L. Trevisan, Stabilizing consensus with many opinions, Proc. SODA 2016, 620-635.
- [CER14] C. Cooper, R. Elsässer, T. Radzik, The power of two choices in distributed voting, Proc. ICALP 2014, 435-446.
- [CER+15] C. Cooper, R. Elsässer, T. Radzik, N. Rivera, T. Shiraga, Fast consensus for voting on general expander graphs, Proc. DISC 2015, 248-262.
- [CNN+18] E. Cruciani, E. Natale, A. Nusser, G. Scornavacca, Phase transition of the 2-choices dynamics on core-periphery networks, Proc. AAMAS 2018, 777-785.
- [CNS+18] E. Cruciani, E. Natale, G. Scornavacca, On the metastability of quadratic majority dynamics on clustered graphs and its biological implications, arXiv:1805.01406 (2018).
- [CRR+17] C. Cooper, T. Radzik, N. Rivera, T. Shiraga, Fast plurality consensus in regular expanders, Proc. DISC 2017, 13:1-13:16.
- [CR16] C. Cooper and N. Rivera, The linear voting model, Proc. ICALP 2016, 144:1-144:12.
- [DGM+11] B. Doerr, L. A. Goldberg, L. Minder, T. Sauerwald, C. Scheideler, Stabilizing consensus with the power of two choices, Proc. SPAA 2011, 149-158.
- [GL18] M. Ghaffari and J. Lengler, Nearly-tight analysis for 2-Choice and 3-Majority consensus dynamics, Proc. PODC 2018, 305-313.
- [HP01] Y. Hassin and D. Peleg, Distributed probabilistic polling and applications to proportionate agreement, Information and Computation 171, 2 (2001), 248-268.
- [KMS19] V. Kanade, F. Mallmann-Trenn, T. Sauerwald, On coalescence time in graphs-When is coalescing as fast as meeting?, Proc. SODA 2019, 956-965.
- [NS19] N. Shimizu, T. Shiraga, "Phase transitions of Best-of-two and Best-of-three on stochastic block models," Random Structures & Algorithms, 59(1), 96-140 (2021).
- [NS20] N. Shimizu, T. Shiraga, "Quasi-majority functional voting on expander graphs," in Proceedings of the 47th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2020), 97:1-97:19.
- [NS23] N. Shimizu, T. Shiraga, "Reversible random walks on dynamic graphs," Random Structures & Algorithms, accepted. arXiv:2102.08002.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Nobutaka Shimizu, Takeharu Shiraga	4. 巻 59(1)
2. 論文標題 Phase transitions of Best of two and Best of three on stochastic block models	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Random Structures & Algorithms	6. 最初と最後の頁 96-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/rsa.20992	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kijima Shuji, Shimizu Nobutaka, Shiraga Takeharu	4. 巻 1
2. 論文標題 How Many Vertices Does a Random Walk Miss in a Network with Moderately Increasing the Number of Vertices?	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2021)	6. 最初と最後の頁 106 ~ 122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/1.9781611976465.8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shimizu Nobutaka, Shiraga Takeharu	4. 巻 97
2. 論文標題 Quasi-Majority Functional Voting on Expander Graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 47th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2020)	6. 最初と最後の頁 97:1 ~ 97:19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4230/LIPIcs.ICALP.2020.97	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobutaka Shimizu and Takeharu Shiraga	4. 巻 146
2. 論文標題 Phase Transitions of Best-of-Two and Best-of-Three on Stochastic Block Models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of 33rd International Symposium on Distributed Computing (DISC 2019)	6. 最初と最後の頁 32:1--32:17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4230/LIPIcs.DISC.2019.32	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Takeharu Shiraga
2. 発表標題 Phase Transitions of Best-of-Two and Best-of-Three on Stochastic Block Models
3. 学会等名 The 33rd International Symposium on Distributed Computing (DISC 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
英国	King's College London		