

令和 2 年 6 月 17 日現在

機関番号：32641

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2019

課題番号：18H05827・19K21019

研究課題名(和文)4次元多様体のシャドウとファイバー構造に関する研究

研究課題名(英文)Research on shadows and fibration structures of 4-manifolds

研究代表者

直江 央寛(Naoe, Hironobu)

中央大学・理工学部・助教

研究者番号：10823255

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：4次元多様体のシャドウを用いて微分構造やファイバー構造に関する研究を行った。主に得られた結果は次のとおりである。(1)ディバイドに対するシャドウの構成法およびLefschetz束のシャドウ表示を与えた。(2)非輪状4次元多様体が標準的な4次元球体と微分同相であるための十分条件をシャドウの文脈で述べた。(3)2次元結び目に対するシャドウを定義し、その具体例とシャドウ複雑度の計算を行った。(4)フロースパインと接触3次元多様体の間の対応と具体例の計算を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シャドウは4次元多様体に関する様々な観点を与える；ハンドル分解、 n -多面体上の n 円板束、曲面の埋め込み・はめ込み。今回の研究は、これらの概念を4次元多様体の中で相互に理解しつつ、4次元トポロジーで重要視される微分構造やファイバー構造の研究に対して新たな研究手法を与えるというものである。また、シャドウは多面体という組み合わせ的性質を持つ応用性の高い対象であり、具体例としても扱いやすい側面がある。シャドウの適用例・応用例を提示したことで、今後の低次元トポロジーにおける研究のひとつの方針を与えたと言える。

研究成果の概要(英文)：We studied differential structures and fibration structures of 4-manifolds by using shadows. The main achievements are as follows. (1) We provided the method of construction of a shadow for a divide and shadow description of Lefschetz fibrations. (2) In terms of shadows, we provided a sufficient condition for an acyclic 4-manifold with boundary the 3-sphere to be diffeomorphic to the standard 4-ball. (3) We define shadows for 2-knots and provided some examples. (4) We studied a correspondence between flow-spines and contact structures on 3-manifolds and provided some examples.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：4次元多様体 シャドウ レフシェッツファイバー空間 微分構造 接触構造 結び目理論 特異点論
3次元多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

微分トポロジーの開幕以降，Freedman 理論や Donaldson によるゲージ理論の登場によって飛躍的な進歩を遂げた 4 次元多様体論であったが，やはり低次元特有の場当たりの手法が要求される側面もあり，可微分多様体としての分類という問題は非常に難しく現状解決には程遠い。したがって，4 次元多様体の研究においては未だに具体例を中心とした実験的な研究が必要であり，適切なクラス分けとそれぞれの特性を捉えることが重要である。

境界付き（可微分）4 次元多様体のシャドウとは，4 次元多様体に局所平坦に埋め込まれた 2 次元の多面体であって，その 4 次元多様体からの縮約によって得られるものとして定義される。シャドウの各面には Euler 数の一般化に相当するグリーンと呼ばれる半整数が備わっており，4 次元多様体の微分同相型を復元するだけの情報を持っている。すなわち，シャドウは 4 次元多様体の組み合わせ的表示と思える。シャドウはもともと量子不変量の研究が目的で Turaev によって導入されたが，Costantino を中心により幾何的な研究が進められた。彼はシャドウの持つ頂点数の最小値としてシャドウ複雑度と呼ばれる 4 次元多様体の非負整数値不変量を定義した。Costantino と Thurston はシャドウの多面体の構造に着目し，境界の 3 次元多様体の単体的体積とシャドウ複雑度の間の不等式を発見している。また，Costantino，古宇田，Martelli，研究代表者らはそれぞれシャドウ複雑度が小さいいくつかの場合で 4 次元多様体の分類を与えている。

2. 研究の目的

シャドウ複雑度は可微分 4 次元多様体としての不変量であることが知られており，今後とも深く研究すべき対象である。上記のシャドウ複雑度による 4 次元多様体の分類は多面体の分解から 4 次元多様体の分解を特徴づけるものであり，4 次元多様体そのものの性質を捉えるにはまだ問題点も多い。さらに，このようなシャドウ複雑度が小さい 4 次元多様体だけでも非常に大きなクラスになっているため，更に細かく記述することが課題であり，本研究の目的とするものである。また，Stein 構造や Lefschetz 束などの概念をシャドウの上で理解するための理論を整備するとともに，エキゾチック微分構造や特異点論への応用を目的としたのが本研究である。

3. 研究の方法

Lefschetz 束を許容する 4 次元多様体のシャドウに対して，局所座標を用いて局所的なグリーンの値を計算し，それを大域的に見直すことで Lefschetz 特異点や正則ファイバーの位置とモノドロミーを特定する。

4 次元多様体の微分同相型を詳しく調べるために，シャドウとなる多面体と 4 次元多様体のそれぞれの分解の間の対応を考察することで，シャドウの上でハンドルの消去など，微分構造を変えない多面体の変形を探る。また，シャドウの表示を用いて得られる境界の 3 次元多様体の手術図式から幾何構造を具体的に調べることで，得られた結果の応用例を与える。

また，コンピュータを用いて多面体の数え上げを行う。具体的に，頂点数が 2 までの多面体で，各面が円板であるものを重複なしに全て特定し，具体例に対する応用を与える。

4. 研究成果

(1) ディバイドに対するシャドウと Lefschetz 束に関する研究

石川昌治氏（慶應義塾大学）との共同研究において，複素平面曲線特異点の Milnor ファイバ

ーのシャドウ表示を与えた．正確には，まずディバイドに対しシャドウを構成する方法を与えた．また，シャドウ上の LF 構造として 4 次元多様体に入る Lefschetz 束の構造を定式化した．これらを組み合わせて，ディバイドから得られるシャドウが持つ標準的な LF 構造に対応する Lefschetz 束が，ディバイドの与える Milnor 束に一致することを証明した．この方法では正則ファイバーがシャドウの部分曲面として直接捉えることができ，グリームの配置からモノドロミー行列の計算も簡単に行える．なお，この結果は一般の曲面上のディバイドについても拡張でき，同様の定理が成り立つ．さらに，自由ディバイドと呼ばれるディバイドの一般化に対し，今回の手法を応用することで結び目がファイバー性を持つための新たな十分条件を与えることができた．

(2) 非輪状 4 次元多様体の微分同相型に関する研究

古宇田悠哉氏（広島大学）との共同研究において「境界が 3 次元球面であるような非輪状 4 次元 2-ハンドル体は標準的な 4 次元球体と微分同相であるか」という問いを考え，その答えが肯定的であるような十分条件をシャドウの言葉で与えた．この問いは可微分 Poincaré 予想にも直結する重要な問題である．この十分条件は，シャドウの特異集合の近傍の情報だけで確認することができ，具体例を扱う上で非常に応用性の高い結果である．実際に，連結シャドウ複雑度が 2 以下の場合に対して上記の問いの答えが肯定的であることが示せた．一般に，連結シャドウ複雑度の値が定数以下であるような 4 次元多様体のクラスは連結和で閉じていることが知られており，今回の結果は非常に広いクラスを捉えていることが分かる．また，証明は結び目理論で知られる Property R と呼ばれる性質と，多面体で定義されるシャドウの特性を活かした方針で行われており，今回の手法は他の問題を考える場合（例えば Betti 数が小さい 4 次元多様体など）にも応用が期待できる．

(3) 2 次元結び目とシャドウに関する研究

2 次元結び目に対するシャドウを定義し，いくつかの具体例とそのシャドウ複雑度の評価を与えた．シャドウの部分曲面として 2 次元結び目が埋め込まれているという状況設定である．そのためハンドル分解と相性が良く，1 次元結び目をもとに得られるスパン結び目，捻りスパン結び目のシャドウを構成することに成功した．構成にはガウスコードが使われており，このことから，これらの 2 次元結び目のシャドウ複雑度が 1 次元結び目の交点数から評価できることが示せた．シャドウ複雑度は補空間（のハンドル分解）に要求される複雑さを表すものであるが，今後はより具体的なシャドウ複雑度の幾何的解釈，既存の不変量との関連や具体例に対する計算などが課題となる．

(4) フロースパインと接触 3 次元多様体に関する研究

石井一平氏（慶應義塾大学），石川昌治氏（慶應義塾大学），古宇田悠哉氏（広島大学）とともに，フロースパインと接触 3 次元多様体に関する研究を行った．まず，正のフロースパインという概念を導入し，任意の正のフロースパインに対して，それにサポートされる接触構造の存在性と接触同相による一意性を証明した．存在性の証明は接触形式を具体的に構成するという方針で行っており，接触形式の貼り合わせの際にフロースパインが正であるという性質が重要となる．また，正であるという仮定を外すと存在性または一意性のいずれかが成り立たなくなるため，この仮定は本質的に必要であることが分かる．さらに，任意の接触 3 次元多様体に対して，それをサポートする正のフロースパインが存在することを示した．この事実から，接触 3 次元多様体に対する複雑度が定義できる．この複雑度が 3 以下ものを全て決定した．また，コイル手術と呼ばれるフロースパインの変形によって新たな接触 3 次元多様体を与える具体例の構成を行った．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuya Koda, Hironobu Naoe	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaharu Ishikawa, Hironobu Naoe	4. 巻 -
2. 論文標題 Milnor fibration, A'Campo's divide and Turaev's shadow	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 the Proceedings of FJV2017 Kagoshima	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 4次元多様体のシャドウとレフシェッツファイバー空間
3. 学会等名 関東若手幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 フロースパイน์と接触構造
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Lefschetz fibrations of divides and shadows
3. 学会等名 ひねる代数 ~Hurwitz actionとその周辺~ (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Lefschetz fibrations of divides and shadows
3. 学会等名 Hyper plane arrangements and Japanese Australian workshop on Real and Complex Singularities (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 4次元ホモロジー球体の微分構造とシャドウ
3. 学会等名 大阪大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary
3. 学会等名 北陸結び目セミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary II
3. 学会等名 ハンドルセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary
3. 学会等名 ハンドルセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Closed 4-manifolds with shadow-complexity one
3. 学会等名 Four Dimensional Topology (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Lefschetz fibrations of divides and shadows
3. 学会等名 The 6th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Fibered links and Lefschetz fibrations of A'Campo's divides via Turaev's shadows
3. 学会等名 東北結び目セミナー 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Shadows and Milnor fibrations of divides
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 Shadows and Milnor fibrations of divides
3. 学会等名 Kyoto Young Topologists Seminar（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 直江央寛
2. 発表標題 2-knots in shadows of 4-manifolds
3. 学会等名 Differential Topology 19（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----