1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４４０１

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2020

課題番号：１８Ｈ０５８３３・１９Ｋ２１０２３

研究課題名（和文）曲面の幾何学構造とLie群への表現

研究課題名（英文）Geometric structures on surfaces and representations into Lie groups

研究代表者

馬場　伸平（Shinpei, Baba）

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：４０８２２８７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：複素射影構造は，曲面上の幾何学構造（局所等質構造であり），様々な視点から研究されている。曲面，及びより一般の多様体の幾何学において，その構造の退化を理解することは，特に変形空間のコンパクト化とも関係し重要である。射影構造は伝統的には解析的な側面が強いが，その射影構造のホロノミー表現は代数的な対象である。この解析的側面と代数的側面の対応を理解することが興味深い。
本課題では，曲面上の複素射影構造の退化をホロノミーが収束する条件のもと研究した。この設定下では，射影構造の複素構造が退化することが知られている。曲面上の複素構造が輪にそって退化する仮定をおいて，様々な観点から射影構造の退化を特徴づけた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
幾何学を通して，代数的および解析的両面から結びつけている。

研究成果の概要（英文）：Complex projective structures are a type of geometric structures (locally homogeneous structures) on a surface, and it has been studies from various perspective. In general, it is important to analyze degeneration of geometric structures on a surface or a more general manifold, especially, in order to compactify it associated deformation space. Projective structures has been studied traditionally more from its analytic side, but holonomy representations of projective structures are algebraic objects, and it is fascinating to understand the relations between projective structures and their holonomy representations.
In this research project, I studied degeneration of projective structures when their holonomy converges. Under this setting, it is known that the underlying complex structure also generates. I characterized such degeneration of projective structure under the basic assumption that complex structures are pinched along a single loop.

研究分野：低次元幾何学および位相幾何学

キーワード：複素射影構造　Teichmuller space　双曲幾何学　リーマン面　character variety

1. 研究開始当初の背景

曲面上の基本的な幾何学構造である $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 上の開集合たちからなる自然な局所座標系として定義でき，古くから研究されてきた。特に、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造は、リーマン面上２次正則微分、双曲幾何、線形微分方程式などと密接に関係し、多面性により $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造の研究が深められてきた。

以下、S を連結向きづけ可能なコンパクト曲面でかつ種数が２以上とする。$\tilde{S}$ を S の普遍被覆とする。この時、$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造をより大域的な視点から定義できる。つまり、各々の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造 C は、準同型写像 $\rho\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$（ホロノミー表現）と ρ-同変な局所同相写像 $f\colon \tilde{S} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$（developing map）の組 $C = (f,\rho)$ である。非離散な表現も含め、ほとんど全ての表現 $\pi_1(S) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造のホロノミー表現となることが知られており, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造は一般の表現に幾何的な意味づけを与えていると言える。

$\mathscr{P}$ を S 上の印付き $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造全体とし、χ を S の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-指標多様体、つまり準同型写像 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ たちの（同値類の）空間とする。この時ホロノミー写像　$\mathrm{Hol}\colon \mathscr{P} \to \chi$ は各々の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造にそのホロノミー表現を対応させる写像である。この時 Hol は局所双正則写像となっており、この意味で局所的な対応は明確である。$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造、またはより一般の幾何学構造の根本的な問題は Hol の大域的な性質を理解することである。特に $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造の場合、Hol はその像への被覆写像ではなく (Hejhal 1975), 対応を複雑にまた興味深くしている。よって道の持ち上げ性質がどのように成り立たないか理解することが大切である。

問.（Kapovich 1995, Gallo-Kapovich-Marden 2000）　S 上の印付き $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造の道 $C_t = (f_t, \rho_t)$, $t \geq 0$ が変形空間 $\mathscr{P}$ の任意のコンパクト集合の外に発散し、そのホロノミー表現 $\rho_t\colon \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が $t \to \infty$ の時、収束しているとする。この時、端点 $t = \infty$ での C_t の発散を特徴付けよ。

三次元双曲多様体の発展に伴い、離散表現に対する、$\mathbb{C}\mathrm{P}$-構造の退化はある程度理解されているが、この問いに対する非離散の場合に根本的な理解はされていなかった。

2. 研究の目的

「$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ や $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ への離散表現の幾何学を、より一般の表現に拡張する」ことである。

3. 研究の方法

$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造には様々な味方がある。Thurston のパラメター、Schwarzian parameter を使い、多角的な視点を使い問題を解決する。

ここで，リーマン面上の２次正則微分が $\mathbb{C}\mathrm{P}^1-$ 構造と対応していることが Schwarzian parameter を与える。また Thurston パラメターとは，３次元双曲幾何に関連した変形空間 $\mathscr{P}$ のパラメター付けである。各々の S に対して，S 上の双曲構造 τ と, measured lamination L を対応させる。この組み (τ, L) が ρ-equivariant な pleated surface $\beta\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^3$ を誘導する。

4. 研究成果

(1) 複素射影構造の退化

上の問の設定では、C_t のリーマン面の構造 X_t は Teichmüller 空間内で発散したいる。上記の問に関して何も進展がなされてこなかったので、リーマン面の構造が 1 つの輪にそって潰れるという基本的な条件をつけ考えた。その結果 CP^1-構造の退化を，　様々な見方から特徴づけた。特に，$\rho_\infty(\ell)$ の trace が ± 2 ことを示した。つまり、$\rho_\infty(\ell)$ は parabolic か単位行列 I になる。$\rho_\infty(\ell)$ が prabolic になる場合は、以下が成り立つことを示した。

1. (*Schwarzian parameters*) X_t がノード付きのリーマン面 X_∞ に退化し、また 2 次正則微分 q_t も X_∞ 上の 2 次正則微分に収束する。この時、residue も 2π の倍数に収束する。
2. (*Thurston parameters*) pleated surface $\beta_t\colon \tilde{S} \to \mathbb{H}^3$ が ρ_∞ 同変な写像 $\tilde{S} \to \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ に収束する。
3. (*Developping pair*) developing map $\tilde{S} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ が ℓ の regular neighborhoodN_ℓ を除いて収束し，N_ℓ の境界の像は $\rho_\infty(\ell)$ に収束する。

$\rho_\infty(\ell)$ が単位行列 I の場合は、ホロノミーと変形空間の関連が必然的に弱くなるが、部分列を取ることで、同様の主張が成り立つ。つまり、任意の発散する列 $t_1 < t_2 < \ldots$ に対して、部分列をとると上の（１）、（２）、（３）が成り立つ。

(2) 離散忠実な準同型写像 $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を Fuchsian 表現と呼ぶ。(2π-)grafting とは $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造 C のある種の手術で、ホロノミーを保ちながら、別の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造を作る。Grafting は C 上の特別な輪にそって，円筒上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 構造を挿入する切り貼りである。私は、以下の Goldman 定理の別証明を与えた。

定理　（Goldman）C を S 上の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造で、Fuchsian ホロノミー $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ をもつとする。このとき、C は、双曲平面 $\mathbb{H}^2/\mathrm{Im}\rho$ を交わらない輪にそって grafting して得られる。

この定理は, もともと，developing map を用い Fuchsian 表現の limit set の引き戻し，曲面を分解することで得られた。私の別証明は，Thurston パラめたーからくる pleated surface を使い，ある意味でより直接的に証明する。

また、私は、Choi と Lee によって示された、developing map の道の持ち上げに関する定理の別証明を与えた。この定理は、上記の Godlman による定理の証明に（証明なしで）使われている。

定理　$C = (f, \rho)$ を $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-構造とする。このとき、Λ を ρ の limit set とすると、f は $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \Lambda$ 上 path liftig property を持つ。私の別証明は Thurston coordaite の観点から与えられている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Shinpei Baba
２．発表標題 Neck-Pinching of CP^1-structures
３．学会等名 Geometric Topology Fair 2019（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年～2020年

１．発表者名 Shinpei Baba
２．発表標題 Neck-pinching of CP1-structures in the character variety
３．学会等名 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年～2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関