様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月　１日現在

機関番号：３２６６５

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2019

課題番号：１８Ｈ０５８３５・１９Ｋ２１０２５

研究課題名（和文）ガロア型対称空間に対する明示的な相対跡公式の研究

研究課題名（英文）Study of explicit relative trace formulas for Galois type symmetric spaces

研究代表者

杉山　真吾（SUGIYAMA, Shingo）

日本大学・理工学部・助手

研究者番号：７０８２１８１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　900,000円

研究成果の概要（和文）：GL(2)の跡公式にMaassカスプ形式の重みをつけたものを考察することにより，GL(2)×GL(3)のRankin-Selberg L関数の中心値が非消滅であるようなGL(3)のカスプ形式の無限存在性を定量的に与えた．また，Hilbert保型形式とSiegle保型形式のHecke固有値が代数的整数であることを重さやレベルが一般の設定で証明することができた．これとGL(2)の跡公式を組み合わせる事により，応用としてGL(2p)(ただしpは素数)のコホモロジカル保型形式でL関数の中心値が非消滅であるものが無数に存在することが分かった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究はLuo，Sarnakの結果を改良し，定量的な評価を与えた．Luo，Sarnakの証明法はWatson,市野の周期積分の公式とPetersson跡公式に依存しているが，本研究は無限素点の情報をコントロールするJacquet-Zagier型跡公式を用いており，新たなアプローチである．スペクトルサイドも，Luo，Sarnakの公式は保型形式の3重積の2次モーメントであるが，本研究では1次モーメントを扱えていることも意義がある．Hecke固有値の代数的整数性を，一般のHilbert，Siegel保型形式の場合に与えたことは基礎文献としても価値がある．

研究成果の概要（英文）：By considering trace formulas on GL(2) weighted by a Maass cusp form, we quantitatively estimated infinitude of cusp forms on GL(3) with non-vanishing of central values of Rankin-Selberg L-functions for GL(2)×GL(3).
Furthermore, we proved integrality of Hecke eigenvalues for Hilbert modular forms and Siegel modular forms when the weight and level are general.
As an application of integrality, combining a trace formula for GL(2), we gave infinitude of cohomological cusp forms on GL(2p) with nonvanishing central L-values, where p is a prime number.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式　跡公式　保型L関数　Hecke固有値

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

整数論・表現論において，跡公式と呼ばれる道具がある．これは簡単に言えば，正方行列 A に対してその跡(トレース)を「A の固有値の和(スペクトルサイド)」と「A の対角成分の和(幾何サイド)」の 2 通りで表示する公式である．この跡公式は，群 G 上の積分作用素のトレースのスペクトル分解による表示(スペクトルサイド)と，積分を軌道ごとに切り分ける表示(幾何サイド)の等式として一般化されている．積分作用素のトレースは，その積分核 K(x,y)の対角線集合{(x,x)　| x \in G}上の積分になる．これを踏まえると，G×G の部分群 H_1×H_2 上で積分核 K(x,y)を積分したものも跡公式の変種といえる．これは相対跡公式と呼ばれ，G/H_1 や G/H_2 の表現論と深いつながりがあり，今日では 2 つの異なる群の間の保型表現のリフティングを研究する上で不可欠である．例えば，E/F を代数体の 2 次拡大とした時，一般線型群 GL(n, E)のカスピダル保型表現が，ユニタリー群 U_{E/F}(n)の保型表現から GL(n, E)の保型表現へのリフティングの像になるための必要十分条件は，その表現の浅井 L 関数が s=1 で１位の極をもつこと(つまり浅井 L 関数の留数が非ゼロ)である．またこの極の存在は保型表現が GL(n,E)/GL(n,F)の表現(GL(n, E)の GL(n,F)-distinguished 表現)であることと同値である．こうしたリフティングへの応用の際，2 種類の相対跡公式の比較が用いられるが，相対跡公式が明示的である必要性はなかった．しかし以下に述べる通り，相対跡公式の明示化は保型形式の研究において重要である．

L 関数の留数の非ゼロ性だけでなく，中心値(s=1/2 での値)の非ゼロ性も整数論において Riemann 予想や Birch・Swinnerton-Dyer 予想から見て取れるように重要な不変量である．そこで，L 関数の中心値や留数の非ゼロ性を満たす保型形式がどれくらい存在するかという疑問が自然に生じる．L 関数の中心値の非ゼロ性を満たす正則楕円カスプ形式の無限性に関する結果として，Ramakrishnan-Rogawski の定理が知られているが，彼らはこの無限性を示す上で，GL(2)の相対跡公式を明示的に計算した．彼らの公式は L 関数の中心値の非ゼロ性のみならず，Fourier 係数の一様分布も与えた．これは相対跡公式を明示的に扱う利点である．そこで，他の設定でも相対跡公式の明示的計算によって，L 関数の特殊値の非ゼロ性，Fourier 係数の一様分布性を調べることにつながるのではないかという見地に立った．

２．研究の目的

上記を踏まえ，本研究では E/F を代数体の 2 次拡大とした時の GL(n,E)/GL(n,F)という対称空間に焦点を当て，相対跡公式を明示的に導出し，スタンダード L 関数の中心値や浅井 L 関数の留数の非ゼロ性，保型表現の無限存在性や Fourier 係数(佐武パラメーター)の一様分布などに応用することを目的とした．また，この相対跡公式と関連がある GL(2, E)/GL(2, F) (ただし E=F×F は分裂 2 次エタール代数)の場合の跡公式も考察した．正則な保型形式の情報を取り出す手法およびパラメーター付き一般化は以前筆者が確立していたので，この跡公式を用いると GL(2)×GL(3)の Rankin-Selberg L 関数の 1/2 での値(中心値)の解析に結びつくと期待される．

また，跡公式と Hecke 固有値の代数的整数性を組み合わせることによる，保型形式の Fourier 係数が生成する体(Hecke 体)の有理数体上の拡大次数の無限増大性が，Serre によって見出された．Serre が見出したこの手法は Shin-Templier の研究によって，広いクラスの保型形式に一般化された．本研究では跡公式の応用を目的として，正則保型形式の Hecke 固有値の代数的整数性についても考察を行い，Shin-Templier の研究で扱われなかった GL(n)(n は 3 以上の整数)の場合の Hecke 体の増大度について調べた．

３．研究の方法

以前筆者は，GL(2, R)の離散系列表現の行列係数を無限素点におけるテスト関数として採用することで，テスト関数のサポートが非コンパクトであるような場合に総実代数体 F 上の分裂 2 次エタール代数 E に対する GL(2, E)の重み付き跡公式を，明示的に計算した．その際に生じた積分は発散するので，積分を正規化することでその発散問題を解消した．重み関数が実解析的 Eisenstein 級数の場合のこの重み付き跡公式は，楕円モジュラー形式の場合の Zagier の公式を Hilbert 保型形式へ一般化したものになっており，基礎体が狭義類数 1 の Hilbert 保型形式の場合の水本の公式や高瀬の公式の一般化にもなっている．本研究では重み関数を Maass カスプ形式にすることで与えられるパラメーター付き跡公式のカスピダル類似を使用した．F が有理数体の場合に幾何サイドを明示化することで，スペクトルサイドは保型形式の三重積の和で表示し，幾何サイドは Maass カスプ形式のトーラス周期積分で表示した．この公式の応用として GL(2)×GL(3)の L 関数の中心値が非ゼロなカスプ形式の無限性を調べるために，1 次モーメントと 2 次モーメントを組み合わせて数え上げ関数の下界を与えるという解析数論的手法を用いた．都築正男氏と共同で研究を行った．

Hecke 固有値の研究に関しては，一般の正則な Hilbert 保型形式および Siegel 保型形式の場合に考察した．PEL 志村多様体を使用することで保型形式の空間の整構造を一般的な設定で俯瞰し，Hecke 作用素の作用を精密に記述することで，整構造が保たれるための次数やタイプの条件を計算した．次に，重さが平行でない Hilbert 保型形式の場合の代数的整数性と，筆者が以前計算した相対跡公式を組み合わせることで，重さが平行でない Hilbert 保型形式の無限族で L 関数の中心値が非ゼロなものの存在を示すことができた．この無限族を保型誘導で GL(2n)の保型形式に移送することで，GL(2n)の保型形式の Hecke 体の拡大次数が無限大に発散するよ

うな族を与えることを試みた．Siegel 保型形式の場合は整構造は一般の設定で既に知られていたので，Hecke 作用素のコセット分解による表示を与え，一般の次数でレベル１のスカラー値正則 Siegel 保型形式の場合の代数的整数性の証明を一般化した．佐久川憲児氏と共同で研究を行った．

４．研究成果

(1) E/F が 2 次拡大の時は跡公式のスペクトルサイドの計算はできたものの，当初の予定通りの結果は得られなかった．しかしながら E/F が分裂 2 次エタール代数の場合の Jacquet-Zagier 型跡公式の研究(都築正男氏との共同研究)に進展があった．Luo-Sarnak による保型形式の 3 重積の 2 乗平均の漸近公式と，先行研究で都築正男氏と共同で研究した Jacquet-Zagier 型跡公式のカスピダル類似を組み合わせることで，GL(2)の偶Maassカスプ形式を固定するごとに，GL(2)×GL(3)の保型 L 関数の中心値が非ゼロな GL(3)のコホモロジカル保型表現が無限に存在することを，定量的に与えることができた．詳細を述べると，GL(2)の保型形式としてレベル１の偶 Hecke Maass カスプ形式 g であってその保型 L 関数の中心値が非ゼロなものを固定する．その時，重さ k，レベル１の Hecke 固有楕円カスプ形式 f の対称 2 次リフト F=Sym^2(f)(GL(3)の保型形式)と g の Rankin-Selberg L 関数 L(s，g×F)の中心値が非ゼロなものが，k を K から 2K の中で動かした時，少なくとも K の定数倍以上は存在する，という結果が得られた．これにより，K を無限大に飛ばすことで，L(1/2， g×F)が非ゼロになるような F=Sym^2(f)が無数に存在することも得た．一見すると g の存在の仮定のもとで得られた定量的評価に見えるが，L 関数の中心値が非ゼロであるような g は本橋の漸近公式により無数に存在することが知られているので，本研究の仮定を満たす g は無数にあり，その g を固定するごとに L(1/2,g ×F)が非ゼロな F も無数に存在することも分かる．当初与えていたのは「無数に存在する」という結果であったが，証明方法が新しい一方で，結果自体は新規性がなかった．しかしながら本研究では，その結果を改良し「K の定数倍以上存在する」という定量的な評価を与えることができた．従来の Luo-Sarnak の公式の証明法は Watson,市野の周期積分の公式と Petersson 跡公式に依存しているが，本研究で扱った跡公式は，無限素点の情報をコントロールする Jacquet-Zagier 型跡公式を用いており，まったく別のアプローチである．実際，Petersson 跡公式はコンパクト集合上の積分から得られる公式である一方で，我々の手法は Rankin-Selberg 型の積分を扱っているので，非コンパクト集合上の積分から得られる公式である．スペクトルサイドに現れる量も，Luo-Sarnak の公式は保型形式の 3 重積の 2 次モーメントであるが，本研究では１次モーメントを扱うことができたので，知られていた 2 次モーメントの公式と組み合わせる事で，上述のとおり定量的な評価を与えるに至った．本研究で用いた公式は，上半平面を SL(2， Z)で割ってできるモジュラー曲線上の確率測度に関する，Fourier 係数の重み付き平均の公式とみなせるので，量子一意エルゴード性の平均版を与えた Luo の結果のある種の精密化とみなせる(量子一意エルゴード性は現在ではすでに証明されていることに注意)．本研究で与えた１次モーメントの公式は振動項を含む形であったので，重さ k を K から 2K まで動かして平均を取ることによって，振動項を処理し，１次モーメントの漸近公式に至った．

(2) 跡公式の応用と関連がある，Hecke 作用素の固有値の研究に関する進展があった．佐久川憲児氏と共同で，Hilbert 保型形式と Siegel 保型形式の Hecke 固有値の代数的整数性を一般的な設定で与え，論文としてまとめた(近々投稿予定である)．この佐久川氏との共同研究ではさらに，重さが平行でない Hilbert 保型形式の Hecke 固有値の代数的整数性の応用として，GL(2p)(但し p は素数)のコホモロジカル・カスプ形式の無限族で，L 関数の中心値が非ゼロかつ Hecke 体の拡大次数が無限大に発散するものが存在することを証明した．この成果を導出するにあたり，筆者が以前研究した GL(2)の極大分裂トーラスに対する相対跡公式を用いて，L 関数の中心値が非ゼロな Hilbert 保型形式の族であって，Hecke 体の拡大次数が無限大に発散するような無限族の存在を示した．この結果を導出するには代数的整数性が本質的に必要である．代数的整数性は,重さが平行な場合はすでに志村の関数論的証明が知られていたが，平行でない重さの Hilbert 保型形式の代数的整数性には，PEL 志村多様体のような幾何的観点が必要であった．次に保型誘導を用いることで，拡大次数が p の総実代数体上で，上記の性質を持つ Hilbert 保型形式の族を GL(2p)の保型形式に移送させ，L 関数の中心値が非ゼロな GL(2p)(但し p は素数)のコホモロジカル・カスプ形式の無限族を与えた．GL(2p)に移送した際のカスピダル性は Hilbert 保型形式の重さが平行でないという条件から来る．そしてこの移送によって Hecke 体にどれくらいのズレが生じるのかを考察することで，保型誘導で与えた無限族が，Hecke 体の拡大次数が無限大に発散するような族であることを示した．

また，Siegel 保型形式の場合は，Hecke 作用素をコセット分解を用いて詳細に記述することで，代数的整数性を証明した．整構造はすでに知られていたが，一方で Hecke 作用素の固有値の代数的整数性はレベル１のスカラー値正則 Siegel 保型形式の場合(次数 2 の場合は黒川，次数が一般の場合は水本)しか文献が存在しない．本研究では一般の次数，一般のレベルで一般のタイプのベクトル値正則 Siegel 保型形式を扱った．次数に比べてタイプがある程度大きい場合に代数的整数性が従い，タイプが次数に比べて大きくない場合は，ある素数べきを掛けることで代数的整数性が従うという結果が得られた．この結果を与える上で，次数とタイプの条件および素数べきも決定した．Hecke 固有値の代数的整数性の応用として，跡公式を用いると「Hecke

体の拡大次数が無限大に発散するような Siegel カスプ形式の無限族が存在する」が導出できる．この応用法自体は既に知られているが，一方で Siegel 保型形式の Hecke 固有値の代数的整数性の証明が一般的な設定でなされている文献は存在しない． したがって本成果における Hecke 固有値の代数的整数性は，基礎文献としても重要な役割を果たす．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Shingo Sugiyama, Masao Tsuzuki	４．巻 275
２．論文標題 An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Functional Analysis	６．最初と最後の頁 2978-3064
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2018.09.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　6件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 杉山真吾
２．発表標題 Jacquet-Zagier型跡公式について
３．学会等名 香川セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 杉山真吾
２．発表標題 モジュラー形式の三重積に関係する変形された跡公式 (A variant of trace formula related with triple products of modular forms)
３．学会等名 ＲＩＭＳ共同研究(公開型)「保型形式，保型表現とその周辺」（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 杉山真吾
２．発表標題 Integrality of Hecke eigenvalues for Hilbert and Siegel modular forms
３．学会等名 上智数論ミニ集会(Number theory mini-workshop at Sophia)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

1．発表者名 杉山真吾
2．発表標題 A cuspidal analogue of trace formula and nonvanishing central L-values for GL(2) × GL(3)
3．学会等名 33rd Automorphic Forms Workshop（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 杉山真吾
2．発表標題 On generalized trace formulas for GL(2)
3．学会等名 2019早稲田大学整数論研究集会（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 杉山真吾
2．発表標題 Trace formulas on GL(2) weighted by automorphic forms
3．学会等名 OberSeminar Analysis und Zahlentheorie（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 杉山真吾
2．発表標題 GL(2) の跡公式の一般化とL関数の特殊値への応用について
3．学会等名 第64回 代数学シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2019年

１．発表者名 杉山真吾
２．発表標題 Hecke作用素のレゾルベント跡公式とその応用
３．学会等名 東京理科大学理工学部数学科「談話会」（招待講演）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考