

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 5 月 12 日現在

機関番号：82502

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2018～2019

課題番号：18H05851・19K21038

研究課題名（和文）衝突項を含む相対論的Vlasovシミュレーションの完全保存スキーム

研究課題名（英文）Fully conservative scheme for relativistic Vlasov simulation including collision terms

研究代表者

白戸 高志（Shiroto, Takashi）

国立研究開発法人量子科学技術研究開発機構・六ヶ所核融合研究所 核融合炉システム研究開発部・研究員（任常）

研究者番号：10827520

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、運動論プラズマにおいて緩和プロセスを記述する相対論的 Landau-Fokker-Planck 方程式の長時間シミュレーションを可能にする、質量・運動量・エネルギー保存スキームを世界で初めて実証した。また、Landau 形式より高速なシミュレーションの実施を目的として、非相対論的な Rosenbluth-Fokker-Planck 方程式に対する質量・運動量・エネルギー保存スキームを、有限要素法の一つである不連続ガレルキン法に基づき開発した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非相対論的 Fokker-Planck 衝突項の保存スキーム開発は 1980 年代から数多く行われてきたが、相対論的方程式に対する保存スキーム開発は不可能であると認識されてきた。本研究では数学と物理学の関係を離散化レベルで厳密に再現することにより、数十年にわたる未解決問題を解決することに成功した。保存スキームの開発によりこれまでよりも長時間信頼できるシミュレーションが可能となるため、これまで計算資源の都合で議論が困難であったプラズマ物理課題に着手できるようになり、核融合発電の実証に資する。

研究成果の概要（英文）：In this work, a mass-momentum-energy-conserving scheme for relativistic Landau-Fokker-Planck equation, which has been used for dissipative kinetic plasma simulations, was demonstrated for the first time. In addition, we developed a mass-momentum-energy-conserving discontinuous Galerkin scheme for non-relativistic Rosenbluth-Fokker-Planck equation in order to demonstrate a faster algorithm than the Landau formulation.

研究分野：プラズマ物理学

キーワード：計算物理学 核融合プラズマ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) Fokker-Planck 衝突項は位相空間における非線形な移流拡散方程式であり、運動論的プラズマの数値計算においてしばしば用いられる。系全体の運動量やエネルギーは平衡状態における分布関数を大きく左右するため、1980年代より非線形な Fokker-Planck 衝突項に対する保存スキーム開発が行われてきた。

(2) しかしながら、保存スキームの開発にはいくつかの未解決課題が存在する。一つは相対論的なエネルギーに対応するローレンツ因子の非線形性のために、相対論的 Fokker-Planck 衝突項に対する保存スキームの開発が困難であると認識されていることである。もう一つは、高速化のために積分微分方程式である Landau 形式を連立偏微分方程式に変換した Rosenbluth 形式に対して、境界条件を含めた保存則の議論が困難であるという問題である。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、Fokker-Planck 衝突項に対する保存スキーム開発を目的とする。初めに、Landau 形式の相対論的 Fokker-Planck 衝突項に対する完全保存スキームを開発する。次に、Rosenbluth 形式の非相対論的 Fokker-Planck 衝突項に対する完全保存スキームを開発する。

3. 研究の方法

(1) Landau 形式の Fokker-Planck スキーム開発にあたり、先行研究で開発した完全保存型相対論的 Vlasov-Maxwell スキームとの結合のために差分法に基づいて議論を行う。

(2) Rosenbluth 形式の Fokker-Planck スキーム開発に関する先行研究より、差分法では境界条件の問題のため完全保存スキームの開発が困難であると結論づけられている。そのため、有限要素法の一つである不連続ガレルキン法を採用して議論を行う。

4. 研究成果

(1) 相対論的 Landau-Fokker-Planck 方程式は質量について保存型で記述される一方で、運動量・エネルギー保存則については多少の解析的変形を経なければ証明することができない。相対論的 Landau-Fokker-Planck 方程式の両辺に運動量・エネルギーをかけて部分積分を行うことにより、保存則に変換することができる。このとき、一見保存則を破る項が現れるが、衝突項が有する数学的対称性を利用することによりその項を消去することができる。

しかしながら、支配方程式を差分法により離散化した場合、部分積分に打ち切り誤差が含まれることにより、通常の離散化手法では数学的対称性を用いても、保存則を破る項を完全に消去することができない。そこで、打ち切り誤差が存在しても保存則を厳密に保証するために、衝突項の引数である速度を「エネルギーの運動量空間差分」により定義した。その結果、数学的対称性の公式にもまた打ち切り誤差が自己無撞着に含まれるため、離散版の部分積分から得られる項を完全に消去することができることを数学的に確認した。

以上のように開発した数値計算法を従来法と比較した。従来手法はエネルギー保存則を厳密に満足できない一方、今回開発した手法は倍精度浮動小数点数の限界程度まで誤差を抑制できていることが確認できる(図1)。また、エントロピーの増幅率も線形理論をよく再現しており(図2)、今回開発した計算手法の正当性を実証することに成功した。

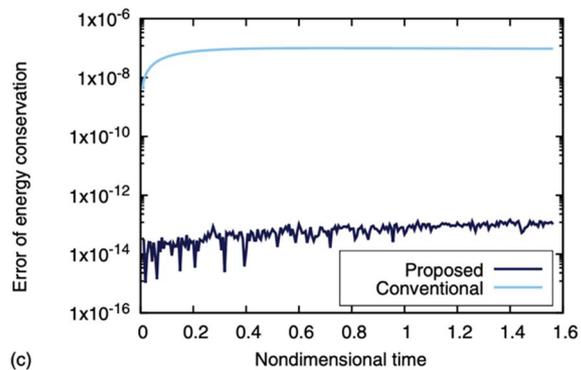


図1: 新旧数値計算法によるエネルギー保存則の誤差検証。(Landau形式)

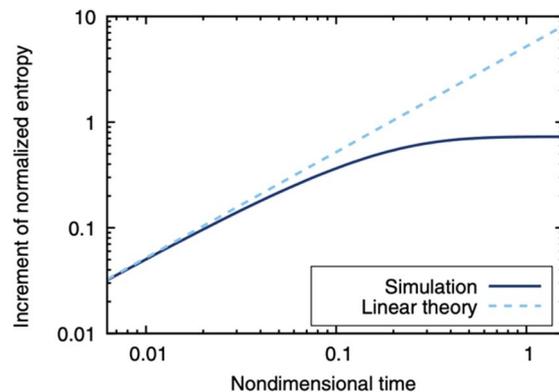


図2: エントロピー増幅率の線形理論との比較。

(2) 本研究では、球対称な非相対論的 Rosenbluth-Fokker-Planck 方程式に対する完全保存スキーム開発を行った。この方程式系に対する数値解法の研究は 2000 年頃から行われているが、以下に挙げる 2 つの理由により差分法ベースの保存スキームの開発は困難であると認識されてきた。

1. 全ての保存則を満足できる境界条件の開発が困難である。
2. 異種粒子衝突における運動量・エネルギー交換を自己無撞着に記述するのが困難である。

これらの問題に対処するため、本研究では有限要素法的一种である不連続ガレルキン法を採用した。不連続ガレルキン法の場合、計算領域の端で数値流束を 0 とすれば容易にすべての保存則を満足する境界条件を設定することが可能である。さらに、不連続ガレルキン法は各セル内において物理量が区分的に連続であるため、体積積分項を解析的に変形して異種粒子衝突においても保存則を満足しやすい形式に置き換えることが可能である。例えば粒子種 s, s' のエネルギーの時間発展について、

$$\iiint \frac{\partial E_s}{\partial t} dV + \iint_{\partial} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{n} dS = \iiint S_s dV, \quad \iiint \frac{\partial E_{s'}}{\partial t} dV + \iint_{\partial} \mathbf{F}_{s'} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint S_{s'} dV \quad (1)$$

と記述できるとする。ここで、式(1)において $S_s + S_{s'} = 0$ が成立するならば、セル内のエネルギーの総量はセル境界からの流入流出のみで説明されることになるが、現実には数値誤差により保存則が破られてしまう。しかしながら、この式を解析的に、

$$\iiint \frac{\partial E_s}{\partial t} dV + \iint_{\partial} \mathbf{G}_s \cdot \mathbf{n} dS = \iiint T dV, \quad \iiint \frac{\partial E_{s'}}{\partial t} dV + \iint_{\partial} \mathbf{G}_{s'} \cdot \mathbf{n} dS = - \iiint T dV \quad (2)$$

と変形した場合、右辺の体積積分項は数学的に対称な形式であるため、たとえ数値誤差に汚染されていようと、足し合わせたときに完全に消去することが可能である。Rosenbluth-Fokker-Planck 方程式は式(2)のように書き下すことが可能であるため、この形式を元に完全保存スキームの構築を行った。

以上の指針に基づいて開発した数値計算法を従来手法と比較する数値実験を行った。初期条件は図 3 に示すように分布関数をステップ関数として与えた。Rosenbluth-Fokker-Planck 方程式は位相空間における移流拡散方程式であり、2 次精度以上の場合に解の単調性を維持することは困難である。本手法は質量保存則とエネルギー保存則を弱形式として採用しているため 2 次精度である上に、weighted essentially non-oscillatory (WENO) スキームなどの非線形リミッターを用いて解の再構築を行うと保存則が破られてしまうため、本手法は本来不連続な分布関数を扱うのに不適である。しかしながら、移流項に風上数値流束、拡散項に交代数値流束を用いているため、計算開始直後は分布関数が部分的に負になるものの、徐々に正值性が回復して最終的に平衡分布へ正しく収束することが確認できる。したがって、不連続を含む非常に厳しい条件の計算でも一定の数値安定性を確認することができた。また、質量及びエネルギー保存則の誤差を図 4 に示す。なお、球対称な分布関数を仮定しているため、運動量保存則は自明に満足される。従来手法はエネルギー保存則に対応する弱形式を式(1)のように離散化するため、数値誤差によりエネルギー保存則が比較的大きな誤差を持つことが確認できる。その一方で、式(2)のような方式でエネルギー保存則を離散化する新規手法は、丸め誤差のみで質量・エネルギー保存則を満足できていることを確認できる。したがって、開発した手法は保存則を厳密に満たしつつ平衡分布への収束を十分な数値安定性により計算できることを確認した。

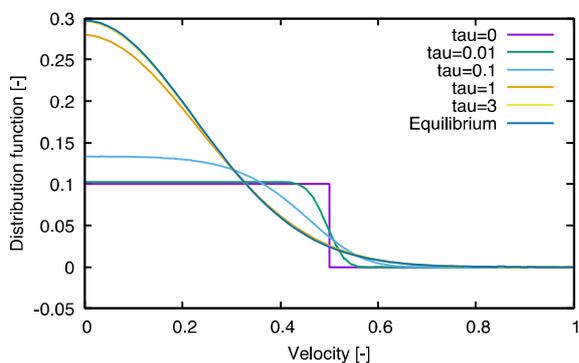


図 3: 開発した保存型数値計算法による不連続分布関数の緩和計算。

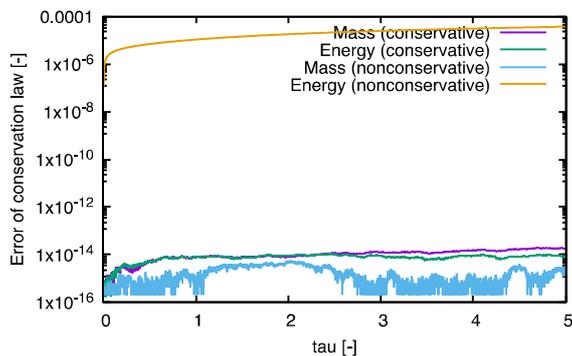


図 4: 新旧数値計算法によるエネルギー保存則の誤差検証。(Rosenbluth 形式)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shiroto Takashi, Sentoku Yasuhiko	4. 巻 99
2. 論文標題 Structure-preserving strategy for conservative simulation of the relativistic nonlinear Landau-Fokker-Planck equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevE.99.053309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 白戸 高志、千徳 靖彦
2. 発表標題 Landau形式の相対論的Fokker-Planck衝突項に対する構造保存スキーム
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Shiroto, Yasuhiko Sentoku
2. 発表標題 A structure-preserving scheme for the Landau-Fokker-Planck equation with the relativistic kernel
3. 学会等名 61st Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白戸 高志、相羽 信行、松山 顕之、矢木 雅敏、千徳 靖彦
2. 発表標題 関数解析に基づくRosenbluthスキーム
3. 学会等名 第36回プラズマ・核融合学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Shiroto
2. 発表標題 Structure-preserving schemes for high-energy-density plasmas
3. 学会等名 US-Japan JIFT workshop on "Multi-scale Simulations in Plasma Physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----