

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K21826

研究課題名（和文）マグニチュードホモロジーの基礎理論の確立から応用へ

研究課題名（英文）Foundation of magnitude homology and applications

研究代表者

吉永 正彦（Yoshinaga, Masahiko）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90467647

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、マグニチュードホモロジーの新しい解釈を導入し基本的な性質の研究を行った。すなわち、距離空間の時空に因果関係から定まる順序集合の順序複体、この順序集合の区間の順序複体の商空間として「マグニチュードホモトピー型」という空間を定めた。マグニチュードホモトピー型の被約ホモロジー群はマグニチュードホモロジーと一致する。マグニチュードホモトピー型は、距離空間に対する経路空間を定式化したものとも考えることもできる。マグニチュードホモトピー型に離散モース理論を適用することで、Mayer-Vietoris型定理など既存の結果の別証明を得、距離空間のある種のひねりに対するマグニチュードの不変性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、距離空間の時空の因果関係から定まる順序集合の順序複体、という新しい観点から「マグニチュードホモトピー型」を導入し、その空間に離散モース理論を適用することでマグニチュードホモロジーの基本的な性質を調べた。マグニチュードホモトピー型は、距離空間版の「経路空間」とみなすことができ、マグニチュードは「距離空間の経路空間上のオイラー標数積分」と解釈できる。マグニチュードは距離空間の大まかなサイズを測る不変量で、ビッグデータを扱う際にも有用な概念であることが期待されている。本研究はマグニチュードを統制する幾何学的構造の研究であると位置づけられる。

研究成果の概要（英文）：In this project, we find a new interpretation of the magnitude homology. Namely,

consider the space-time of the metric space and partial order defined by the causal relations. We define the magnitude homotopy type to be the order complex of an interval of the causal poset divided by a certain subcomplex. Then the reduced homology group of this space is isomorphic to the magnitude homology group of the original metric space.

In case the metric space is a graph, the magnitude homotopy type is homotopy equivalent to the double suspension of the space introduced by Asao and Izumihara. Magnitude homotopy type also can be considered as the "paths space" for metric spaces. Applying discrete Morse theory to the magnitude homotopy type, we obtained several results including new proofs of Mayer-Vietoris type theorem, Kunnet type formula, and the invariance of the magnitude under sycamore twists.

研究分野：数学

キーワード：マグニチュードホモロジー 距離空間 マグニチュード

1. 研究開始当初の背景

距離空間のマグニチュードは豊穡圏のオイラー標数の研究の副産物として Leinster により 2013 年に導入された概念である。距離空間 X に対して、そのマグニチュード $|X|$ は正の実数 (または $+$) に値を取る。マグニチュード $|X|$ は「点どうしが十分近いときには、同じ一つの点とみなし、十分離れているときには、別の点とみなす」という振る舞いを示す。距離空間の大体のサイズを与える不変量といえる。また有限距離空間の位数という概念の精密化とみなすことができる。このような概念は応用上も重要で、実際 Leinster によっても指摘されているが、数理生物学者の Solow と Polaski によって、同様の概念がすでに導入されていた。

2016 年～2017 年ごろ、Hepworth, Willerton, Leinster, Shulman 等によって、マグニチュードの圏化として「マグニチュードホモロジー」が導入された。導入後すぐに、伝統的な組み合わせトポロジー (順序複体) 的観点からのマグニチュードホモロジーの研究や、パーシステントホモロジーとの関係の研究などが始まっている。

2. 研究の目的

マグニチュードホモロジーに関する問題の一つに、「そもそも定義はこれでよいのか」という根本的な疑問が、何人かの研究者から提示されている。これは「圏化」の論証が、形式的なレベルにとどまっていることとも関係している。もう一つの自然な問いは、有限距離空間 X のマグニチュード $|X|$ を定義するために、マグニチュードウェイトという関数 (一般にはボレル測度) が使われるが、マグニチュードウェイトの圏化は何か? という問いである。本研究では、距離空間とその部分集合の対に関する相対マグニチュードホモロジーを導入し、これをマグニチュードウェイトの圏化と位置付けることで、より精密な構造を持ったマグニチュードホモロジーの基礎理論を構築し、「圏化」の議論を解析的に正当化することを目指す。

マグニチュードは上で述べたように、距離空間の「サイズ」を測る概念として、多くの応用が期待されている。本研究では、マグニチュードウェイトや (相対) マグニチュードホモロジーの生物学や都市工学的問題への応用を目指す。ここでいう「都市工学的問題」というのは、現時点では、「公共施設の配置問題」と呼ばれる問題を想定している。これは、人口分布が与えられたある領域に公共施設 (学校, 病院, 図書館, スーパーマーケットなど) を建てる際の問題である。建設予算や住民のアクセスの良さなど様々な制約の下で最適な施設数、規模や配置を問う問題である。この問題に対する、ある数学的モデルにおいては、マグニチュードが最適施設数、マグニチュードウェイトが施設の最適配置に対応することが観察されており、このような現実的問題に応用可能な数学的理論としてのマグニチュードホモロジー論の展開を目指す。背景でも述べたように、マグニチュードやマグニチュードホモロジーに関する多様な研究が発表され、様々な発展の方向性が模索されている。この国際的な流れの核を形成し、マグニチュードホモロジー論の基礎理論と応用に関する研究を加速させる。

3. 研究の方法

本研究の目的は、おおまかには「基礎理論の整備」と「応用」の二つの側面を持つが、これらを分離することなく発展させるために、研究打ち合わせやワークショップ等の開催を通して、周辺分野の研究者と知見を共有し、幅広く様々な分野の知見を取り入れ、研究を進展させる。問題意識は「応用トポロジー」と呼ばれるテーマとも平行しており、特に、パーシステントホモロジーの理論との関係を意識しながら研究を進める。

4. 研究成果

初年度の 7 月に Edinburgh 大学で行われた研究集会 Magnitude 2019 へ招待講演者と出席した。本計画にある、相対マグニチュードホモロジーを weighting の圏化とみなすというプログラムを発表し、それについて Willerton 氏と議論を行った。このワークショップはマグニチュードを研究するほぼすべての数学者が集う会場で、多くの研究者と有益な情報交換が行えた。とりわけ、解析が専門の M. Meckes 氏の会話に触発されて、本研究で中心に添えている、マグニチュード weighting を超関数として解釈するべきである、という新たな視点を得、帰国後にユークリッド空間の半空間 (超平面で区切られた半分の空間) のマグニチュード weighting を記述することを目標として、計算を開始した。Willerton 氏の奇数次元球体のマグニチュードの解析に関する論文に現れる様々な公式との関係を示唆する計算が蓄積されてはいるが、残念ながら期間中に成果をまとめるには至らなかった。

有限距離空間の中でも、グラフから定まる距離空間は、Hepworth-Willerton が最初にマグニチュードホモロジーを定義して以来、中心的な研究対象である。2020 年に Asao-Izumihara 氏らは

グラフから、ある単体複体対(Asao-Izumihara 複体)を構成し、そのホモロジーがマグニチュードホモロジーホモロジーと(次数を2ずらせば)同型であることを示した。大学院生の田嶋優氏との議論の中で、この複体に離散モース理論を適用することでマグニチュードホモロジーに関する結果を精密化できる、というアイデアを得た。2018年にGu氏がPawful グラフというクラスのグラフを導入し、そのマグニチュードホモロジーが対角型になることを示していた。これはAsao-Izumihara 複体の被約ホモロジーが一つの次数に集中していることを意味するため、球面の一点和となることを示唆していたが、実際に離散モース理論を使って証明をすることができた。

この離散モース理論を使った議論は、マグニチュードホモロジーの様々な性質を示すうえで大変有効であることが徐々に明らかになってきたのだが、グラフでしか定義されていないAsao-Izumihara 複体を距離空間に一般化する必要があった。そのために、次のような新たな観点を導入した。距離空間に時間パラメータを考慮した時空を考え、その中で因果関係を考えることで、順序構造を定めることができる。この順序集合の二点が定める区間の順序複体のある部分複体で割ることで、得られる空間を「マグニチュードホモトピー型」と呼ぶ。この空間の被約ホモロジー群はもとの距離空間のマグニチュードホモロジー群と同型になる。また、グラフから定まる距離空間の場合は、Asao-Izumihara 複体の二回懸垂とホモトピー同値になる。因果関係から定まる順序複体に離散モース理論を用いることで、マグニチュードホモロジーの基本的性質として先行研究(Hepworth-Willerton, Bottinelli-Kaiser)で得られていた結果に見通しの良い証明を与えることができる。例えばKunnetthの公式は通常の代数トポロジーのKunnetthの定理に帰着され、Mayer-Vietoris型の定理もホモトピー型のレベルで論じられるようになった。Roff氏が最近示した「グラフのマグニチュードのシカモア捻りによる不変性」を有限距離空間に一般化した。これらの結果とマグニチュードホモトピー型の様々な性質をまとめた45ページの論文を田嶋氏と共同で執筆し、2022年3月にプレプリントとして発表した。(専門誌に投稿後2023年5月にアクセプトされた)。

マグニチュードそのものではないが、数え上げ問題の圏化と位置付けられる研究として、吉田氏と、ポセットの間の射の空間の位相を調べる研究を行った。以前はオイラー標数が一致していることのみ調べられていたある空間が同相であることが分かった。

2022年12月に大阪大学でWorkshop on Magnitude 2022を開催し、マグニチュードの研究をしている国内の研究者や周辺の研究者が一堂に会し、情報交換をする有益な機会を設けることができた。Workshopでは、マグニチュードホモロジーのデータサイエンスへの応用を志向した講演もあり、本研究期間内には達成できなかった応用研究の展開も将来的に期待できる状況である。2023年度後半からマグニチュードホモロジーを専門とする外国人ポスドクを受け入れるめどが立つなど、本研究は、マグニチュードホモロジー関係の国際的な研究コミュニティの立ち上げに一定の役割を果たしたと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshida Taiga, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 -
2. 論文標題 What is Q - Q for a poset Q ?	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Order	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11083-022-09600-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Higashida Kyosuke, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 170
2. 論文標題 Feynman graphs and hyperplane arrangements defined over F_1	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 104368 ~ 104368
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2021.104368	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kaneta Ryuki, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 53
2. 論文標題 Magnitude homology of metric spaces and order complexes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 893 ~ 905
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12469	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tajima Yu, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 25
2. 論文標題 Magnitude homology of graphs and discrete Morse theory on Asao-Izumihara complexes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 331 ~ 343
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/hha.2023.v25.n1.a17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tajima Yu, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 -
2. 論文標題 Causal order complex and magnitude homotopy type of metric spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 田嶋優, 吉永正彦
2. 発表標題 グラフのマグニチュードホモロジーと Asao-Izumihara 複体における離散モース理論
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiko Yoshianga
2. 発表標題 A geometric realization of combinatorial reciprocity of order polynomials
3. 学会等名 OBERSEMINAR ARRANGEMENTS AND SYMMETRIES, Bochum (Germany) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 A threshold of length in magnitude homology
3. 学会等名 Magnitude 2019: Analysis, Category Theory, Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 マグニチュードポセットとマグニチュードホモトピー型
3. 学会等名 Workshop on Magnitude 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 数え上げ, マグニチュード, トポロジー
3. 学会等名 大阪大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田嶋優, 吉永正彦
2. 発表標題 グラフのマグニチュードホモトピー型と Mayer-Vietoris 型定理
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Magnitudes and magnitude homology of metric spaces
3. 学会等名 Energies of Knots, Residues of Manifolds and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田嶋 優 (Tajima Yu)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------