様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ２１８２９

研究課題名（和文）パーフェクトイド空間を用いたGross-Zagier型公式の研究

研究課題名（英文）Study of Gross-Zagier type formula via perfectiod spaces

研究代表者
三枝　洋一（Mieda, Yoichi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：７０５２６９６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,900,000円

研究成果の概要（和文）：当初の目標は，パーフェクトイド空間の理論を用いて数論的基本補題という予想を研究するというものであった．研究を開始した年に，Wei Zhangによって数論的基本補題が解決されたため，少し目標を変更して研究を進めた．ユニタリ型志村多様体のTate予想に関する研究，Darmon-Rotgerによるp進Gross-Zagier公式を一般化する研究に取り組み，重要な着想を得たが，具体的な成果に至るためには，さらに研究を積み重ねる必要がある．また，Fargues-Scholzeによる局所Langlands対応と従来の局所Langlands対応の関係について，斜交群Sp(6)の場合に成果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
ユニタリ型志村多様体のTate予想に関する研究，p進Gross-Zagier公式を一般化する研究は，BSD予想の一般化であるBeilinson-Bloch-加藤予想への貢献に直接結び付くものである．本研究によって得たアイデアにより，研究を進めるべき方向性が明確になったため，近い将来に具体的な成果が得られることが期待できる．また，局所Langlands対応に関する成果は，Fargues-Scholzeの構成が正統的なものであることを保証するとともに，局所志村多様体のエタールコホモロジーの決定という，従来から興味を持たれてきた問題にも応用を持つものである．

研究成果の概要（英文）：The original goal was to study the conjecture so-called the arithmetic fundamental lemma by using the theory of perfectoid spaces. However, in the first year the conjecture had been solved by Wei Zhang, so I slightly changed the goal. I studied the Tate conjecture for the unitary Shimura varieties and a generalization of the p-adic Gross-Zagier formula due to Darmon-Rotger. I got some important ideas, but I need further research to achieve concrete results. I also investigated the relation between Fargues-Scholze's local Langlands correspondence and the usual one, and obtained some results in the case of the symplectic group Sp(6).

研究分野：数論

キーワード：パーフェクトイド空間　Gross-Zagier型公式　志村多様体　Rapoport-Zink空間　数論的交叉数

１．研究開始当初の背景
Gross-Zagier 公式とは，モジュラー曲線上の「Heegner 点」と呼ばれる点に対し，その数論的な複雑さを測る「自己高さペアリング」という値を「保型 L 関数の微分係数」という解析的な量によって記述する等式である．この公式および志村・谷山予想（現在は解決済み）を用いることで，有理数体上の楕円曲線Eに対し，その有理点のなすアーベル群の階数がEの L 関数の零点の位数によって記述できるという BSD 予想を部分的に解決することができる．BSD 予想の一般化として Beilinson-Bloch-Kato 予想というものが知られており，それに進展を与えるためにも，Gross-Zagier 公式を高次元のモジュラー多様体（志村多様体）に拡張することは非常に重要な問題である．これについては，Wei Zhang を中心とする研究により，研究開始時点で以下のようなことが分かっていた：

- n次ユニタリ群に対応する志村多様体をX_nと書き，対角埋め込み$X_n \to X_n \times X_{n+1}$の像を$\Delta_n$と書くとき，「モジュラー曲線の Heegner 点」を「志村多様体の直積$X_n \times X_{n+1}$の代数的サイクルΔ_n」に置き換えると Gross-Zagier 公式がうまく一般化できそうである．
- 上記の一般化を証明するためには，その局所版にあたる予想である数論的基本補題，および，保型表現に関する相対跡公式という等式を証明すればよい．
- 相対跡公式については部分的な結果も多く，かなり解決に近づいてきている．

数論的基本補題については多くの先行研究があるものの，研究開始当初は，nが 3 以下の場合を除いて完全解決されている場合は存在せず，Gross-Zagier 公式の一般化に応用できる段階ではなかった．

２．研究の目的
「研究開始当初の背景」で述べたように，Gross-Zagier 公式を一般化するためには，数論的基本補題を解決することが最も重要な課題であると考えられる．この課題を，パーフェクトイド空間という技術を用いることで解決することが本研究の主要な目的であった．パーフェクトイド空間とは，2010 年代前半に Scholze によって導入された，p進幾何学における空間概念である．
数論的基本補題を考察する際の舞台となる Rapoport-Zink 空間（局所志村多様体）は，有限レベルにおいては扱いが難しいが，レベルに関して射影極限をとると，「無限レベル Rapoport-Zink 空間」と呼ばれるパーフェクトイド空間となり，比較的扱いやすいという現象が先行研究において観察されていた．その観察に基づき，無限レベル Rapoport-Zink 空間に対して Gross-Zagier 公式の局所版にあたる「無限レベル版の数論的基本補題」という等式を新たに定式化し，証明することを目指した．

３．研究の方法
「無限レベル版の数論的基本補題」を定式化する際には，最も簡単な Rapoport-Zink 空間である Lubin-Tate 空間に対して公式を確立することから始める．この場合には，Qirui Li による交叉数の計算結果があるので，これを無限レベル Lubin-Tate 空間を用いて書き直す．さらに，その結果をユニタリ群の設定と見比べることで，ユニタリ群の Rapoport-Zink 空間に対する「無限レベル版の数論的基本補題」がどのような形であるべきかを予想する．
立てた予想を証明する際には，パーフェクトイド空間を用いて志村多様体や Rapoport-Zink 空間を調べている先行研究を参考にする．このような研究は，Scholze を中心とするグループによって活発に行われている．また，パーフェクトイド空間を一般化した，ダイヤモンドと呼ばれる空間概念も存在する．これらに関する情報収集を行い，研究目的の達成に有効であるかを考察する．

４．研究成果
以上の計画のもとで 2019 年に研究を開始したが，同年 9 月に Wei Zhang によって数論的基本補題が解決されるという大きな動向があった．これを受けて，当初の予定を変更して，Wei Zhang の論文の検討を行い，その手法を参考にして「無限レベル版の数論的基本補題」を確立することはできないかと試みた．しかし，検討の結果，Wei Zhang の論文では，本研究課題の目指す方向とはかなり異なった種類の議論を行っていることが判明した．そこで，研究の方針を変更し，以下の 2 つを目指すことにした．

A) 数論的基本補題にこだわらず，様々な形の Gross-Zagier 型公式を志村多様体に対して証明することを目標とする．
B) 当初の方針を変更するまでに収集した，パーフェクトイド空間やダイヤモンドに対する情報を生かして，新たな定理を証明できないかを考える．

これらについて，順に説明を行う．
A)については，2 つの重要な着想を得たものの，具体的な成果に至るためには，さらに研究を積み重ねる必要がある状況である．まず，American Institute of Mathematics で開催されたワークショップ Geometric realizations of Jacquet-Langlands correspondences への参加を通して，

ユニタリ型志村多様体の Tate サイクルに対する Tian, Xiao, Zhu らの研究を一般化する研究に取り組んだ．この Tian, Xiao, Zhu らによる研究は，Liu-Tian-Xiao-Zhang-Zhu による，Rankin-Selberg モチーフに対する Beilinson-Bloch-Kato 予想の研究においても有効に用いられているため，それを一般化することは，本研究課題を進展させるために有効であると考えられる．先行研究においては, 中間次元のコホモロジーに対して Tate 予想が成立することを証明しているが, 本研究では，中間次元ではないコホモロジーに対して類似の問題に取り組んだ．比較的低次元の志村多様体に対して，サイクルをどのように構成すればよいかについては見当がついたものの，Tate 予想に対して肯定的な成果を挙げるためには，かなり複雑な計算を行う必要があり，それは今後の課題として残されている．また，もう一つの試みとして，Darmon-Rotger による p 進 Gross-Zagier 公式の一般化にも取り組んだ．この公式は，モジュラー曲線の三重積の対角サイクルの p 進 Abel-Jacobi 写像による像を，モジュラー形式の三重積 L 関数の p 進版と結び付けるものであり，BSD 予想の変種である同変 BSD 予想への応用を持つものである．Darmon-Rotger の論文では，p 進保型形式の q 展開を用いた明示的な計算が鍵となっており，そのままでは高次元の志村多様体への一般化が難しい．そこで，q 展開を用いる部分を別の議論に置き換える方針について検討を行った．少なくとも志村曲線の場合には，新しい議論がうまく機能しそうだという手ごたえを得ており，もう少し時間をかければ，発表可能な成果を得られそうな状況である．

次に，B)について述べる．パーフェクトイド空間やダイヤモンドに関する情報を収集する過程で, それらの理論の主要な適用先である Fargues-Scholze の「局所 Langlands 対応の幾何学化」についても理解を深めることができた．その際に得られた知見を用いて，Fargues-Scholze によって定義された L パラメータ（以下では Fargues-Scholze パラメータと呼ぶ）が，既に局所 Langlands 対応が得られている場合に，既存の L パラメータと一致するかという問題に取り組んだ．考察の対象としたのは，斜交群 Sp(6)に対する局所 Langlands 対応である．Sp(6)に対する局所 Langlands 対応は Arthur によって証明されているが，その構成は大域的な保型表現論を用いるものであり，Fargues-Scholze による局所的かつ幾何学的な構成とは大きく異なる．それらを比較することは, Fargues-Scholze の構成が正統的なものであることの保証になるとともに, 局所志村多様体のコホモロジーの計算など, 従来から興味を持たれてきた問題とも関連する, 重要な研究課題である．得られた成果は以下の通りである：

- Sp(6)の既約超尖点表現πの（Arthur の意味での）L パラメータがG_2型という条件を満たすならば，πの Fargues-Scholze パラメータは（Arthur の意味での）L パラメータと一致する．
- pが 5 以上の素数であるとき，$\mathrm{Sp}_6(\boldsymbol{Q_p})$の単純超尖点表現で中心指標が自明であるものは，$G_2$型の L パラメータを持つ．

応用として，GSp(6)の局所志村多様体に既約超尖点表現がどのように寄与するかを決定することができる．さらに考えるべき課題としては，Sp(6)の既約超尖点表現でG_2型の L パラメータを持つものを単純超尖点表現以外にも多数見つけ出し，可能ならば，いつG_2型の L パラメータを持つかについての分かりやすい判定条件を与えるというものがある．これについては，補助期間終了後も継続して研究を行う所存である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Mieda Yoichi	４．巻 オンライン
２．論文標題 Lefschetz trace formula and l-adic cohomology of Rapoport?Zink tower for GSp(4)	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Mathematische Annalen	６．最初と最後の頁 オンライン
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02342-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　5件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 Yoichi Mieda
２．発表標題 On supercuspidal part of the l-adic cohomology of the Rapoport-Zink space for GSp(4)
３．学会等名 30eradecaen: 30e Rencontres arithmetiques de Caen（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 Yoichi Mieda
２．発表標題 On supercuspidal part of the l-adic cohomology of the Rapoport-Zink space for GSp(4)
３．学会等名 The 2022 Pacific Rim Mathematical Association Congress（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 三枝 洋一
２．発表標題 局所Langlands対応とp進幾何
３．学会等名 大岡山談話会（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 三枝 洋一
２．発表標題 GSp(4)のRapoport-Zink空間のl進コホモロジーの超尖点部分について
３．学会等名 代数的整数論とその周辺2021
４．発表年 2021年

１．発表者名 Yoichi Mieda
２．発表標題 On Fargues-Scholze local Langlands correspondence for some supercuspidal representations of Sp(6)
３．学会等名 Satellite Conference in Number Theory of International Congress of Basic Science（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Yoichi Mieda
２．発表標題 On Fargues-Scholze local Langlands correspondence for some supercuspidal representations of Sp(6)
３．学会等名 The fifth Japan-Taiwan Number theory conference（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

三枝洋一のウェブサイト https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/index-j.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関