

令和 5 年 5 月 10 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K21832

研究課題名（和文）作用素環と深谷圏

研究課題名（英文）Operator algebras and Fukaya categories

研究代表者

河東 泰之（Kawahigashi, Yasuyuki）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90214684

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：作用素環論における部分因子環論とテンソル圏の関係について研究を行った。2次元トポロジカル物性に現れる4-テンソルが作用素環論において以前から知られているbi-unitary connectionと実質的に同じものであることを示し、projector matrix product operator と呼ばれる行列の値域が、作用素環論において知られている、4-tensor から生じる部分因子環の higher relative commutant と同じものであることを示した。また、4-tensor がいつここで考えている形になるかの特徴づけも与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最近注目を集めている2次元トポロジカル物性における数学的構造を圏論と作用素環論の立場から研究した。これによって数理物理学に現れる圏論の構造が、作用素環論における部分因子環の言葉で記述できることが分かった。特に2次元トポロジカル物性で研究されているテンソルネットワークに現れる4-tensor と、作用素環論における部分因子環論で非退化な commuting square の記述に現れる bi-unitary connection とが実質的に同じであることを明らかにし、この関係を追究することによってこれまで知られていなかった部分因子環論との新たな関係を見出した。

研究成果の概要（英文）：We studied relations between subfactor theory in operator algebras and tensor categories. We have shown that 4-tensors appearing in 2-dimensional topological order in condensed matter physics are essentially the same as bi-unitary connections which are well-studied in subfactor theory. We have further proved that the range of projector matrix product operator in physics setting is the same as the higher relative commutant of the subfactor arising from the 4-tensor. Moreover, we gave a characterization when a general 4-tensor is of the form considered in this setting.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 テンソル圏 フュージョン圏 部分因子環

1. 研究開始当初の背景

作用素環論と圏論の関係についてはこれまで多くの研究がある。特に Jones の部分因子環論においてテンソル圏が重要な役割を果たすことはよく知られている。また数理論理学では、超弦理論、特に 2 次元共形場理論がテンソル圏の理論と密接に関係していることがわかっている。その一方、深谷圏も多くの数理論理学の話題との関係が知られており、部分因子環論と何か関係があるのではないかと期待される。またそれとは別に、物性物理学におけるトポロジカル物性においても類似の数学的構造が研究されてきており、テンソル圏的な対称性が重要な役割を果たすと期待されている。さらにそこではテンソルネットワークが重要な役割を果たしている。これも作用素環論、部分因子環論におけるダイアグラムの手法と近似性があり、さらに深い関係があることが期待される。

2. 研究の目的

作用素環論、特に部分因子環論と圏論の関係をさらに深く理解することが目的である。双加群や自己準同型が対象であるようなテンソル圏の研究はすでに広く行われているが、それを越えたテンソル圏の役割を作用素環論の枠組みで解明したい。それにはテンソルネットワークの働きを、これまでの部分因子環論におけるダイアグラムの手法との関係をさらに深く理解することが鍵となる。これによって 2 次元トポロジカル物性における圏論的対称性の果たす役割を理解することが重要な目的となる。

3. 研究の方法

2 次元トポロジカル物性におけるテンソルネットワークに現れる 4-テンソルの性質を調べることが基本になる。作用素環論における部分因子環論においてもよく似た 4-テンソルが研究されており、その両者の関係をきちんと理解する、両者においてそれぞれ研究されている性質や対象の間の翻訳辞書を作る、また片方において自然に発生する問題を他方の設定で考察する、これまで双加群や自己準同型が対象であるようなテンソル圏で研究されてきた問題を 4-テンソルの立場から見直す、といった手法を用いて研究を行う。

4. 研究成果

Bultinck-Marien-Williamson-Sahinoglu-Haegeman-Verstraete らの 2 次元トポロジカル秩序に関する最近の研究に現れる 4-テンソルは、Jones の部分因子環論における非退化 commuting square を特徴づける bi-unitary connection と本質的に同じものであることを示した。より詳しくは、有限指数、深さ有限の部分因子環から生じる bi-unitary flat connection が、彼らの扱っている 4-テンソルのすべての条件を満たすこと及び、それから生じるチューブ代数と彼らの 4-テンソルから生じるエニオン代数が同型であることを示した。これより Verlinde 公式が成り立っていることが分かる。また、flatness 条件を落とした bi-unitary connection も、彼らの理論の枠組みに入っていることを示した。

さらにこの同一視を進め、彼らの導入した projector matrix product operator と呼ばれる射影作用素が長さ k の時、この射影作用素の値域が、bi-unitary connection の生み出す部分因子環の k 次の higher relative commutant に一致することを示した。

さらにこれに関連して、森田同値なユニタリ・フュージョン圏の言葉を用いて、Jones の基礎構成を繰り返すことによって深さ有限の II_1 型部分因子環を生み出すような有限次元 C^* 環の非退化 commuting square の特徴づけを与えた。この種の commuting square は佐藤信哉によって前に研究されたもので、彼の構成をわずかに一般化したものが完全に一般的なそのような commuting square を与えることを示した。これによって上のタイプの 4-テンソルも完全に特徴づけられている。さらにその応用として、与えられた深さ有限の超有限 II_1 型部分因子環を生み出すような有限次元 C^* 環の commuting square の特徴づけも与えた。

さらに、組紐フュージョン圏上でのある種の誘導表現の理論である、alpha-induction について、bi-unitary connection の立場から研究を行った。alpha-induction は組紐フュージョン圏内の (可換とは限らない) Frobenius 代数から生じるテンソル関手である。これはこれまでは III 型因子環の自己準同型の延長という形で研究されてきた。一方、bi-unitary connection と呼ばれるユニタリ行列の族を使ってフュージョン圏が記述できることも、作用素環論における部分因子環論でよく知られている。そこで、bi-unitary connection によって記述された組紐フュージョン圏上で alpha-induction がどのように記述されるかを明らかにした。その中で、元になる Frobenius 代数が可換の場合には、alpha-induction から生じる bi-unitary connection が flat になることも証明した。これはもともとは有理的 2 次元共形場理論の表現論や Dynkin 図形のダ

イアグラムの研究で知られていたものを一般化したことになっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yasuyuki Kawahigashi	4. 巻 -
2. 論文標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Internat. Math. Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnac082	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawahigashi Yasuyuki	4. 巻 35
2. 論文標題 Two-dimensional topological order and operator algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Modern Physics B	6. 最初と最後の頁 2130003 ~ 2130003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0217979221300036	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Kawahigashi	4. 巻 110
2. 論文標題 A remark on matrix product operator algebras, anyons and subfactors	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1113-1122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-020-01254-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Kawahigashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Projector matrix product operators, anyons and higher relative commutants of subfactors	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-022-02519-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

[学会発表] 計12件(うち招待講演 12件/うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Tensor networks and operator algebras
3. 学会等名 Complex geometry and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 トポロジカル量子コンピュータの理論と数学
3. 学会等名 トポロジカル科学の現在と未来 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Tensor networks, commuting squares and higher relative commutants of subfactors
3. 学会等名 作用素環論の最近の進展 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Tensor networks, commuting squares and higher relative commutants of subfactors
3. 学会等名 Subfactors, Vertex Operator Algebras, and Tensor Categories (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Topological order, tensor categories and operator algebras
3. 学会等名 MSJ-KMS Joint Meeting 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Tensor networks, commuting squares and higher relative commutants of subfactors
3. 学会等名 International Workshop on Operator Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Tensor networks, commuting squares and higher relative commutants of subfactors
3. 学会等名 Special Week on Operator Algebras 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Topological Quantum Groups, C*-Tensor Categories, and Subfactors (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 New Frontiers: Interactions between Quantum Physics and Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Operator Theory 28, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 A characterization of a finite-dimensional commuting square producing a subfactor of finite depth
3. 学会等名 Operator Algebras: Subfactors, K-theory, Conformal Field Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yasuyuki Kawahigashi
2. 発表標題 Mathematics of topological phases of matter and operator algebras
3. 学会等名 Pan-Pacific Workshop on Topology and Correlation in Exotic Materials (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

河東泰之
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------