

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：32612

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K21835

研究課題名（和文）漸近双曲性とYoccoz's puzzleを用いたPalis予想解決への挑戦

研究課題名（英文）A Challenge to the resolution of Palis's conjecture by means of the asymptotic hyperbolicity and Yoccoz's puzzle

研究代表者

高橋 博樹（Takahasi, Hiroki）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・教授

研究者番号：00467440

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000円

研究成果の概要（和文）：単峰写像や可算マルコフシフト、ヘテロカオス・ベーカー写像など的一様双曲性を持たない力学系について、大偏差原理、熱力学形式、マルチフラクタル解析などに基づくエルゴード理論的な研究を行い、いくつかの有望な成果が得られた。これらの成果を非双曲的なエノン写像の解析に本格的に繋げることはまだできていないが、少なくとも最初の分岐パラメータのエノン写像の解析に繋げるための手がかりは徐々に得られつつある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一様双曲性を持たないエノン写像の解析に端を発した本研究であったが、本研究期間内では、エノン写像自体の研究よりもむしろ、その周辺の他の重要な力学系の研究に大きな進展があった。これらの成果はそれ自体で意義が深いだけでなく、今後エノン写像の力学系の解析を進める上で重要な手がかりを与えることになると期待される。また、本研究費を用いて2023年8月主催した国際研究集会「KiPAS Dynamics Days」では国内外から述べ100名以上の参加があった。本研究集会に参加した若手研究者と海外の研究者の間での共同研究も始まりつつあり、我が国の力学系理論のレベルアップに貢献できた意義は大きい。

研究成果の概要（英文）：Quite a few promising results on large deviations, thermodynamic formalism, multiracial analysis have been obtained on dynamical systems lacking the uniform hyperbolicity such as unimodal maps, countable Markov shifts and heterochaos baker maps. These results are expected to play vital roles in the analysis of Henon maps at the first bifurcation parameter.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 エルゴード理論 双曲性

## 1. 研究開始当初の背景

力学系とは決定論的な時間発展の法則に従い変化する系を数学的に定式化したものであり、常微分方程式や差分方程式はその典型である。そして力学系理論は、これらの方程式の解(軌道)の漸近挙動の定性的な理解を目標としている。その鍵となる性質が、時間発展での図形の伸び縮みに関する「双曲性」であり、例えばコンパクト負曲率多様体上の測地流は最も厳格な双曲性である「一様双曲性」を持つ。一様双曲性が力学系の空間で稠密でないことは70年代半ばまでには知られており、計算機の発展により気象予測、生物学、電気工学などの応用の分野で発見された「カオス」として知られる力学系の多くは一様双曲性を持たない。このため、現代の力学系理論の中心課題は一様双曲性を持たない力学系の研究へと移っている。1つの大きな研究の潮流は、力学系全体を性質が理解可能な力学系で荒い意味で近似しようとする「Palis 予想」に向けた研究である。一方で、エノン写像などの具体的な力学系に対する精密な研究も非常に重要であり、潮流としてはより大きいものになっている。

## 2. 研究の目的

初期値鋭敏依存性をもたらすランダム性のため、カオス力学系の理解には不変確率測度が重要な役割を果たす。各々のエルゴード的な不変確率測度に対しては、その典型的な軌道に沿う漸近的な指数的拡大/縮小率を表すリャプノフ指数が定義される。正または負のリャプノフ指数はそれぞれ拡大または縮小に対応し、リャプノフ指数としてゼロを持たないものは双曲型測度と呼ばれる。力学系の「漸近双曲性」とは、任意のエルゴード的な不変確率測度が全て双曲型であり、それらのリャプノフ指数が全てゼロから一様に離れていることを指す。つまりエルゴード理論的な一様双曲性を意味し、測度ゼロの集合上で起きる非双曲性を許容する概念である。本研究では、漸近双曲性を持つ力学系のアトラクターの個数の有限性をヨッコズパズル (Yoccoz's puzzle) を用いて証明することを目指す。最終的な目標は、「アトラクターを有限個しか持たない力学系で任意の力学系を近似できるであろう」とする Palis 予想の肯定的解決である。

## 3. 研究の方法

力学系の不変集合やパラメーター空間をパズルピースと呼ばれる小部分に分解し、それらの間の関係の記述に基づき大域的な構造を捉える。与えられた力学系をパズルピースに分解するためには、力学系の一様双曲性が破綻する「力学系的臨界点」を明示し、それを用いて全体の統制を行う必要がある。最初から一般の力学系を考察することは困難が大きいため、まず具体例の考察から開始する。エノン写像については、研究代表者がすでに漸近双曲性を持つパラメーターの存在を示し、力学系的臨界点も明示している。これらのパラメーターでパズルピースの構成を試みる。

## 4. 研究成果

エノン写像は2変数の力学系であり、ロジスティック写像などの1変数力学系の臨界点に相当する「目印」がはっきりしない。このため、エノン写像の力学系の解析は一般に困難であることはよく知られている。技術的な課題は「2変数力学系における図形の時間発展のコントロール」であるが、研究開始当初は「一般には困難でも特殊な状況では可能なのではないか?」と考えていたため、研究代表者による成果がいくつか挙がっていた分岐パラメーターでのエノン写像についてさらなる解析を行うことを計画していた。しかし、この計画が開始間もなく困難に直面した。そこで、エノン写像を直接考察するのではなく、その1次元モデルである単峰写像や、記号モデルである可算マルコフシフトが生成する力学系を精密に考察し、エノン写像の解析のための手がかりを得ることを試みた。さらには、高次元力学系が持つ複雑さの本質を抽出していると考えられるヘテロカオス・ベーカー写像と呼ばれる区分線形な力学系に関して斎木吉隆氏(一橋大学)、James A. Yorke 氏 (University of Maryland)、山本謙一郎氏(長岡技術科学大学)と共同研究を遂行した。

エノン写像の解析への手がかりを得るために始めた大偏差原理、熱力学形式、マルチフラクタル解析などに基づくエルゴード理論的な研究がそれら自身で大きく発展し、いくつかの有望な成果が得られた。これらの成果を非双曲的なエノン写像の解析に本格的に繋げることはまだできていないが、少なくとも最初の分岐パラメーターでの解析に繋げるための手がかりは徐々に得られつつある。

本科研費のからの補助により、2023年3月には力学系とエルゴード理論、気象科学に関する国際ワークショップ「International Workshop on Ergodic Theory, Dynamical Systems and Climate Sciences」を主催した。2023年8月には国際研究集会「KIPAS Dynamics Days」を主催した。2023年度にはイタリア・トリエステでの力学系理論の国際会議「From KAM Tori to ETFs」にて招待講演「On intrinsic ergodicity of heterochaos baker maps and exponential mixing for the Dyck system」を行なった。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshitaka Saiki, Hiroki Takahasi, James A. Yorke	4. 巻 22
2. 論文標題 Hausdorff dimension of Cantor intersections and robust heterodimensional cycles for heterochaos horseshoe maps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 1852-1876
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshitaka Saiki, Hiroki Takahasi, James A. Yorke	4. 巻 36
2. 論文標題 The twisted baker map	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1776-1788
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroki Takahasi	4. 巻 35
2. 論文標題 Statistical properties of periodic points for infinitely renormalizable unimodal maps	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 6399-6421
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroki Takahasi	4. 巻 144
2. 論文標題 Large deviation principle for the backward continued fraction expansion	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and Their Applications	6. 最初と最後の頁 153-172
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2021.11.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lulu Fang, Hiroki Takahasi, Yiwei Zhang	4. 巻 34
2. 論文標題 Precise asymptotics on the Birkhoff sums for dynamical Systems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 7095-7108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ac20a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Johannes Jaerisch, Hiroki Takahasi	4. 巻 385
2. 論文標題 Mixed multifractal spectra of Birkhoff averages for non-uniformly expanding one-dimensional Markov maps with countably many branches	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroki Takahasi	4. 巻 151
2. 論文標題 Hausdorff dimension of sets with restricted, slowly growing partial quotients	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3645-3653
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yong Moo Chung, Hiroki Takahasi	4. 巻 74
2. 論文標題 Large deviation principle for S-unimodal maps with flat critical points	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 129-150
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroki Takahasi	4. 巻 181
2. 論文標題 Uniqueness of minimizer for countable Markov shifts and equidistribution of periodic points	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 2415-2431
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroki Takahasi	4. 巻 33
2. 論文標題 Large deviations for denominators of continued fractions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 5861-5874
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Hiroki Takahasi
2. 発表標題 Statistical properties of heterochaos baker maps
3. 学会等名 International Workshop on Ergodic Theory, Dynamical Systems, and Climate Sciences
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋博樹
2. 発表標題 Level-2 large deviation principle for countable Markov shifts without Gibbs states
3. 学会等名 2022年度冬の力学系研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋博樹
2. 発表標題 Statistical properties of heterochaos baker maps
3. 学会等名 2022年度エルゴード理論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋博樹
2. 発表標題 あるpiecewise/partially hyperbolicな力学系の最大エントロピー測度について
3. 学会等名 RIMS共同研究 力学系の理論と諸分野への応用
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋博樹
2. 発表標題 Statistics of periodic orbits for infinitely renormalizable S-unimodal maps
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroki Takahasi
2. 発表標題 Large deviation principle for arithmetic mean of continued fraction expansion
3. 学会等名 Dynamics seminar (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

HIROKI TAKAHASI www.math.keio.ac.jp/~hiroki/ Hiroki TAKAHASI http://www.math.keio.ac.jp/~hiroki/
---

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 International Workshop on Ergodic Theory, Dynamical systems and Climate Sciences	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 KiPAS Dynamics Days	開催年 2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------