

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32619

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K21836

研究課題名（和文）タイムラグが誘導する解の特異性形成の機構解明と解のダイナミクスの数理解析

研究課題名（英文）Elucidation of the mechanism of solution singularity formation induced by time lag and mathematical analysis of solution dynamics by such mechanism

研究代表者

石渡 哲哉（Ishiwata, Tetsuya）

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：50334917

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000円

研究成果の概要（和文）：タイムラグの効果を取り入れた数理モデルの1つである遅延微分方程式を扱い、ある2次元モデルにおいて、方程式の非線形性との相互作用により誘導される解の有限時間爆発現象を世界で初めて見出し、数学的な証明を与えた。さらに、このモデル方程式ではいかなる小さなタイムラグであってもこのような現象が出現し、さらに、無限個の様々な周期をもつ周期解が出現することも示した。この研究を土台として、1次元モデルに対して常微分方程式との比較を軸に解の爆発が起きる条件についての結果を得た。さらに、タイムラグがある時間区間での履歴を参照する分布型の場合についても解の爆発の十分条件を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた遅延誘導爆発現象は、これまで知られていなかった現象であり、それを数学的に明らかにしたことは学術的な価値があり、この成果をベースに非線形遅延微分方程式の研究が活性化することが期待される。また、本研究から得られる時間遅れに関する理解は、ある現象の数理モデル化の過程において、時間遅れを無視できるか取り入れるべきかについての知見を与えることが期待できる。よって、現象の理解やシステムの制御など、関連する科学や工学へも新たな視点を与えることができるため、社会的な意義も高い。

研究成果の概要（英文）：Delay differential equations are one mathematical model that incorporates the effect of time lag.

This study mainly discusses the blow-up problem of nonlinear delay differential equations. Our research has led to a groundbreaking discovery: the phenomenon of the finite-time blow-up of the solution induced by the interaction with the time lag and the nonlinearity of the equations. This finding, accompanied by a rigorous mathematical proof, has profound global implications for understanding nonlinear dynamics. It opens up new avenues of research and application in various fields. Furthermore, we have obtained sufficient conditions for blow-up of solutions for scalar delay differential equations through a comparison with ordinary differential equations. Moreover, we considered the case where the history reference is information about the solution in a specific time interval in the past and obtained sufficient conditions for the solution explosion.

研究分野：応用数学

キーワード：遅延微分方程式 タイムラグ 解の爆発 周期解 解のダイナミクス 安定性

1. 研究開始当初の背景

自然現象や社会現象には、時間遅れを伴い、過去の状態に依存した時間発展をするシステムが多くみられる。例えば、時間遅れを伴った相互作用は、機械工学における制御問題や、結合系の同期現象、生態系の個体群動態と周辺環境、大気現象や社会の経済政策と景気変動、ネットワーク上の情報伝達など幅広い現象に現れ、未知関数の導関数とその過去の状態に依存する遅延微分方程式 (Delay Differential Equations) によって定式化された数理モデルが前世紀から提案されてきた (Hale and Lunel(1993), Diekmann et al., (1995)). Hutchinson-Wright 方程式や Mackey-Glass 方程式を始めとして、多くの方程式で、時間遅れが平衡点の不安定化や周期振動解の出現を引き起こすことが知られている (Smith, 2011)。一方で、系の不安定な周期軌道を安定化する方法として時間遅れフィードバックを利用した制御方法が提案されている (Pyragas, 1992)。このように時間遅れは解の不安定化・安定化の両面を導くことから解構造は複雑多様になることが多く、見た目が簡素な遅延微分方程式でも、その解のダイナミクスを理解出来る状況は限定的であり、多くは平衡点 (定常解) の存在性やその周辺での局所的な漸近挙動の解析となっている。本研究課題申請時においても、その状況が続いており、特に不安定な解の典型とも言える解の爆発現象や、非線形多次元系での解の挙動、時間発展途中の解の遷移挙動などについては、あまり研究が進展していない状況であった。

2. 研究の目的

1の背景を受けて、本研究では時間遅れがあるからこそ現れてくる現象に焦点をあて、方程式の非線形性と時間遅れの相互作用により出現する遅延微分方程式の解の多様性の解明とそれを生む数学的機構を明らかにすることをテーマとした。研究開始前の予備的な研究により、ある種の非線形遅延微分方程式系においては、時間遅れが入ることにより初めて解の有限時間爆発現象が出現することが予期されていたので、本研究課題ではまず第1に、この時間遅れにより誘導される爆発解が存在することを数学的に明らかにすること、および、その数学的機構を明らかにすることとした。さらに、すでに触れた課題申請前の予備的考察により周期解の構造が変わることが示唆されており、これを第2のターゲットとした。また、数値実験による考察により、不安定な周期解の存在が示唆され、この解の周辺にしばらく回転しながら滞在し、そののちに有限時間で爆発する解が数値的に観測されていたので、周期解の構造解明と合わせてこの遷移ダイナミクスについても研究のターゲットとした。また、これらの解の性質を調べるにあたり、1で述べたように、非線形かつ多次元系の遅延微分方程式については解のダイナミクスを数学的に調べる方法論自体が未整備であったので、本研究課題を遂行することによって、このような現象・機構を解析するための数理解析手法や数値解析法の構築・整備を行い、非線形遅延微分方程式の解がもつ多様性解明の一枚組みを構築することを目指した。

3. 研究の方法

2であげた3つのターゲットについて、まず1の爆発解の解析、2の周期解の解析を進めた。研究の手法としては、数学的研究が中心となるので、分担者を含めた研究メンバーが個々に数学解析を進めつつ、定期的に研究打ち合わせをすることで研究を遂行した。また、数値計算により解の挙動についての良質な知見を蓄積することを並行して実施した。また、遅延微分方程式に関するセミナーをこの研究メンバーや関連する研究者と実施するとともに、遅延微分方程式に関するRIMS研究集会、日本応用数理学会における正会員企画OSを開催し、遅延微分方程式の数学研究だけでなく応用研究をしている研究者や、時間遅れ問題に関心を持つ研究者と広く情報交換、議論を実施することで有益な知見を得、それを生かして本研究課題のターゲットに取り組んだ。

1の爆発解の解析では、まず典型的な2次元振動子系モデルの時間遅れ版を構築し、このモデルの解析を進めた。このモデルは、ファンデルポール方程式など、より現実的な振動モデルへのプロトタイプとしての位置づけとして構築した。本課題に引き続き数学研究を展開するために、このプロトタイプモデルの爆発解出現機構を明らかにし、数学的基盤を整備するためである。また、同じ遅延微分方程式モデルの周期解の構造について、軌道が円周となる周期解についての解析を進めた。第3のターゲットである遷移的挙動については、まず数値的にどのような周期解が影響を及ぼしているかを同定するため、予想される不安定周期解の軌道近傍での数値計算を行った。

上記のモデルの解析を進める過程で、時間遅れの効果がどのように方程式に入っているかが重要であるという新しい視点を得た。そのため、上記の研究と並行して、より履歴の参照の仕方と方程式の解の性質、特に解の爆発現象との関係に焦点を絞って考察を進めた。まず定数のタイムラグの場合について、遅延項がない常微分方程式との比較という視点から解析を進めた。次に、タイムラグがある場合とない場合をつなぐモデル方程式として、分布型の遅延微分方程式(微分

積分方程式)を考え、分布の重み(積分カーネル)と解の爆発についての関係について考察を進めた。

4. 研究成果

(1) 非線形自励振動系モデルにタイムラグの効果を入れた2次元遅延微分方程式系について

任意の正のタイムラグの場合に有限時間で爆発する解が存在することを示した。証明の過程で、ある時間区間で方程式を切り出し得られる常微分方程式系における、ある変数の定常解の出現が解の爆発を引き起こしていることを解明した。この仕組みは、我々が明らかにした遅延誘導爆発解を生む数学的機構の1つとなる。更に、解が爆発する場合、無限遠方に発散するときの方向が、この定常解が表す方向であることが分かった。一方、任意の正のタイムラグの場合に無限個の円形周期解が存在することを示した。これらの周期解は、数値的にはタイムラグが小さい場合には漸近安定な周期解が1つ存在すること、その他の円形周期解は不安定であること、タイムラグが大きい場合にはすべての円形周期解が不安定であることをまず数値的に予測し、最終的に数学的に証明した。これらの成果および数値計算による解挙動の分析については下記関連業績1にまとめられている。なお、この論文は2023年度日本応用数理学会の論文賞を受賞している。3つ目のターゲットの遷移的挙動については、数値実験でしばしばみられる挙動として、ある円周近傍でしばらく回転しながら滞在し、その後無限遠方に発散する挙動がある。このある程度の時間滞在する円周近傍が何により定まるかが問題であるが、これがタイムラグがゼロのときに漸近安定である周期解からタイムラグを正に動かしたときに伸びる周期解の枝の近傍であることが数値的に予測された。この結果についてはまだ数学的な考察が進んでおらず、今後の課題となっている。また、別の爆発解の出現機構としては、まだ数学的な考察が進んでいないが、差分型モデルや比例的時間遅れをもつ場合での爆発現象の可能性について数値的に観測できているため、これらの数学解析を進めることも今後の課題となっている。

(2) 定数時間遅れをもつ1次元非線形遅延微分方程式の爆発解について

一般的な非線形性をもつ定数時間遅れの1次元遅延微分方程式の爆発現象を、同じ非線形性を持つ対応する常微分方程式の爆発現象と関連付け、解の爆発がある意味において同一となる条件を明示し、解の爆発に対する時間遅れの寄与を明らかにした。また、特別な場合について、爆発解のBlow-up rateや解が爆発する初期条件について考察を行った。これらの成果は下記関連業績2にまとめられている。さらに、この1次元問題の考察を発展させ、線形の時間遅れ項が解の爆発を促進するケースと抑制するケースの両方がありうる問題があることが分かった。これについての系統的な研究はまだ知られておらず、今後の研究課題である。

(3) 分布型の時間遅れをもつ微分方程式の解の爆発について

(2)から出てきた定数時間遅れの問題と常微分方程式の比較研究において、時間遅れの入り方(履歴の参照の仕方)がどのように解の性質に影響するかを調べるため、両者を微分積分方程式で1つにまとめ、積分カーネル(分布に対する重み)の違いにより分類することを志向した研究である。この研究により、原点で0になる積分カーネルが有限時間爆発の有無を分けることが分かった。ただし、臨界であるちょうど原点で0になるカーネルの場合は完全には解明できておらず、カーネルが多項式オーダーで原点で0になる場合は正值解がすべて有限時間爆発することが分かったが、分水嶺となる積分カーネルが存在するかどうかなど今後の課題となっている。まだ十分解明が進んでいないため論文化はしていないが、得られた状況については下記関連業績3にまとめられている。この分水嶺となる積分カーネルが存在するかどうかについて、近似問題を構成し研究を行ったが、その際、解の爆発を引き起こさない項が、近似の極限においては爆発解の爆発時刻の決定に強く寄与していることが数値的にみられた。これについては、まったく理論的考察が進んでおらず、なぜそうなるかもまだ見当がついておらず、新たな問題として今後の研究課題となっている。なお、この分布型遅延微分方程式の爆発解の研究は、完全に一致しないものの、従来からよく研究されてきたVolterra型積分方程式の爆発問題と重なるところもあり、今後はこれらの積分方程式との関係を見ることも課題となる。

(4) 周期解に関する研究

上記で述べたもののほか、分布型の遅延微分方程式に対して周期解の存在や解の漸近挙動を得ている。これらの成果は下記関連業績4にまとめられている。

関連業績

1. Eremin E. Ishiwata, T. Ishiwata, Y. Nakata, Delay-induced blow-up in a planar oscillation model, Japan J. Indust. Appl. Math., 38 (2021) 1037-1061. (DOI

- 10.1007/s13160-021-00475-x)
2. Tetsuya Ishiwata, Yukihiro Nakata, A note on blow-up solutions for a scalar differential equation with a discrete delay, Japan J. Indust. Appl. Math., 39 (2022) 959-971. (DOI 10.1007/s13160-022-00533-y)
 3. 石渡哲哉, 微分方程式の解の爆発とタイムラグについて, 第 42 回発展方程式若手セミナー報告集, 2022, 61-67.
 4. Y. Nakata, Existence of a period two solution of a delay differential equation, Discrete & Continuous Dynamical Systems - S. 2021, 1103-1110. (DOI/10.3934/dcdss.2020392)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Tetsuya Ishiwata, Yukihiko Nakata	4. 巻 39
2. 論文標題 A note on blow-up solutions for a scalar differential equation with a discrete delay	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan J. Indust. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 959-971
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-022-00533-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 石渡 哲哉, 中田 行彦	4. 巻 2232
2. 論文標題 遅延微分方程式の解の爆発現象についての考察	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 124-134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 石渡哲哉	4. 巻
2. 論文標題 微分方程式の解の爆発とタイムラグについて	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 第 42 回発展方程式若手セミナー報告集	6. 最初と最後の頁 61-67
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Eremin E. Ishiwata, T. Ishiwata, Y. Nakata	4. 巻 38
2. 論文標題 Delay-induced blow-up in a planar oscillation model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1037-1061
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-021-00475-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Y. Nakata	4. 巻 14
2. 論文標題 Existence of a period two solution of a delay differential equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - S	6. 最初と最後の頁 1103-1110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計36件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 遅延微分方程式の解の爆発について
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 時間非整数階移流方程式に対する単調性保存スキーム
3. 学会等名 日本応用数理学会 2022 年度年会 正会員企画 OS: 時間遅れと数理
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中田行彦, 石渡哲哉
2. 発表標題 いくつかの遅延微分方程式の解の爆発について
3. 学会等名 本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 多体系における伝達遅延現象を表す線形遅延微分方程式の解析
3. 学会等名 2022年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukihiko Nakata, Tetsuya Ishiwata
2. 発表標題 On a blow-up phenomenon in scalar delay differential equations
3. 学会等名 BioMATEmatics An International Conference on Biomathematics and Biostatistics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 微分方程式の解の爆発とタイムラグ
3. 学会等名 第42回発展方程式若手セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石渡哲哉, 中田 行彦
2. 発表標題 遅延微分方程式の爆発問題についての考察
3. 学会等名 日本応用数理学会 2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 遅延微分方程式の解の爆発現象についての考察
3. 学会等名 RIMS 共同研究（公開型）「時間遅れ系と数理科学：理論と応用の新たな展開に向けて」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 ある遅延微分方程式の解の爆発と周期解について
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石渡哲哉, Alexey Eremin, 石渡 恵美子, 中田 行彦
2. 発表標題 2次元遅延微分方程式系の周期解の安定性について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 遅延微分方程式の解の爆発現象に関する考察
3. 学会等名 京都駅前セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中田行彦, Gabriella Vas
2. 発表標題 階段形の非線形関数をもつ遅延微分方程式について
3. 学会等名 日本応用数学会 2020年度 年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中田行彦, Gabriella Vas
2. 発表標題 ステップ型の非線形性をもつ分布型の遅延微分方程式
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石渡哲哉, 中田行彦
2. 発表標題 ある分布型の時間遅れをもつ微分方程式の爆発解について
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tetstuya Ishiwata, Yukihiro Nakata
2. 発表標題 On a blow-up phenomenon in scalar delay differential equations
3. 学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 感染症の数理モデルから現れる時間遅れをもつ微分方程式と解のダイナミクス
3. 学会等名 日本数学会 (応用数学分科会 特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 Delay-induced blow-up and related topics
3. 学会等名 長崎偏微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 分布型の遅れをもつ微分方程式の解の爆発について
3. 学会等名 日本応用数理学会 年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 分布型の遅れをもつ微分方程式の解の爆発について
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 時間遅れが誘導する解の爆発現象について
3. 学会等名 岩手数理科学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 時間遅れが誘導する解の爆発現象とその周辺
3. 学会等名 第1回 時間遅れが誘導する現象と数理
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 ある遅延微分方程式の解の爆発現象について
3. 学会等名 発展方程式論の新展開：数理論と現象解析の協働(京都大学数理解析研究所)（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 ある遅延微分方程式の解の爆発現象と周期解の安定性について
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析に関する研究情報交換会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Y. Nakata
2. 発表標題 Period two solutions of distributed delay differential equations
3. 学会等名 11th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Nakata
2. 発表標題 Period two solutions of distributed delay differential equations
3. 学会等名 Equadiff (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 分布型の時間遅れをもつ微分方程式の周期解について
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 感染症の流行動態における時間遅れ
3. 学会等名 第1回時間遅れが誘導する現象と数理
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 分布型の時間遅れをもつ微分方程式の対称的な周期解について
3. 学会等名 北陸応用数理研究会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石渡恵美子
2. 発表標題 比例的時間遅れについて
3. 学会等名 第1回時間遅れが誘導する現象と数理
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石渡哲哉
2. 発表標題 時間遅れと解の爆発
3. 学会等名 時間遅れ系に関する研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ishiwata
2. 発表標題 Delay-induced blow-up of solutions to some oscillation model with a constant delay
3. 学会等名 ASAAP seminar, University of L'Aquila（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ishiwata
2. 発表標題 Blow-up of solutions to some delay differential equations
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics(ICIAM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ishiwata
2. 発表標題 On finite difference schemes for the time-fractional advection equation
3. 学会等名 One-day mini-symposium of "Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics" (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 T. Ishiwata
2. 発表標題 Monotonicity-preserving numerical scheme for fractional advection equation
3. 学会等名 Gran Sasso Science Institute Workshop "An afternoon on delay differential equations" (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Y. Nakata
2. 発表標題 Period-two solutions for a class of distributed delay differential equations
3. 学会等名 12th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 中田行彦
2. 発表標題 個体群動態に現れる時間遅れ
3. 学会等名 2023軽井沢 グラフと解析研究集会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 ニコラ・バカエル（著）稲葉寿（訳）國谷紀良（訳）中田行彦（訳）竹内康博（訳）	4. 発行年 2022年
2. 出版社 東京大学出版	5. 総ページ数 228
3. 書名 人口と感染症の数理はいかに創られてきたか: 個体群ダイナミクスの数学史	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	石渡 恵美子 (Ishiwata Emiko) (30287958)	東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授 (32660)	
研究分担者	中田 行彦 (Nakata Yukihiro) (30741061)	青山学院大学・理工学部・准教授 (32601)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

ロシア連邦	Saint-Petersburg State University			
-------	-----------------------------------	--	--	--