2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月１２日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ２３４０２
研究課題名（和文）数論における指数和の応用の新展開

研究課題名（英文）New developments in applications of exponential sums in number theory

研究代表者
鈴木　雄太（SUZUKI, Yuta）

立教大学・理学部・助教

研究者番号：３０８５２１９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：指数和の評価において基礎理論として必要となる数論における統計的結果のいくつかについて，先行結果の改善・拡張を行った： 1．素数２つの積の分布について．Decker-Moree，Justus，Landauによる3つの先行結果をすべて連続的に含むような漸近公式を得た．2．無理数論における篩法の応用について．Chowla-ErdosによるLambert級数の無理性を示す技法を拡張し，Lucas数列の逆数和に適用可能にした．3．滑らかな数の分布について．Hildebrand-Tenenbaumによる滑らかな数の一様評価のさらなる漸近展開を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
指数和の評価に必要な，素数の積の分布，篩法，滑らかな数といった主題に関する結果を，先行結果に比べて，制限が少なく，適用範囲が広く，得られる情報の多い形に改善することができたため，指数和の評価法のより柔軟な基礎理論を提供できたと言える．本研究には，これら新しい基礎理論により今後の指数和の評価法の発展や応用に寄与することが期待できるという学術的意義がある．

研究成果の概要（英文）：Improved or extended some preceding results on statistical results used as the basic theory of exponential sums: 1. Distribution of the product of two primes. Obtained an asymptotic formula continuously covering the results of Decker-Moree, Justus and Landau. 2. Application of the sieve method in irrationality. Extended the method of Chowla-Erdos on the irrationality of the Lambert series to the form applicable to the sum of the reciprocals of Lucas sequences. 3. Distribution of smooth numbers. Obtained a further asymptotic expansion of the uniform asymptotic formula of Hildebrand and Tenenbaum for smooth numbers.

研究分野：解析的整数論

キーワード：解析的整数論　指数和　素数　篩法　無理数論　滑らかな数　鞍点法

１．研究開始当初の背景

数論とは元来自然数ないしは整数の性質を調べる分野である．自然数の線形な順序関係に沿って種々の数列を数え上げ，数論的現象の統計的挙動を考えることが有用である．ある数列を数え上げたとき，その量は解析的に表示され取り扱われるが，自然数というのは離散的な対象であるためにこの解析的な表示は近似としてしか与えられない．この近似の際に必要となる誤差評価においては，指数和の評価が必要となる．

２．研究の目的

- 指数和による誤差評価が検討されてこなかった解析的整数論の問題を再発掘し，これら問題の現在最良の結果を改善し，これら問題やその周辺に新しい視点を提供する．
- 新しい指数和による誤差評価の例を探し求める中で，指数和の基礎技法に必要とされる新しい側面を提案し，これら技法の発展・新展開に寄与する．

３．研究の方法

指数和の評価において必要となるまたは有用であると分かっている，特定の素因数分解の形を持つ自然数，篩の技法，滑らかな数等々の数論の問題を取り上げて，従来の結果を改善して，より精密かつ柔軟な結果を得る．これにより指数和の技法の基礎理論の拡充に寄与する．

４．研究成果

(1) ２つの素数の積の分布について（S. Saad Eddin 氏との共同研究）

コンピュータ通信で用いられる公開鍵暗号の一種である RSA 暗号は,「2 つの素数の積を計算することは容易であるが，計算された積から元の 2 つの素数へと分解することは困難である」という事実を利用している.そのため,種々の条件を加えた 2 つの素数の積の分布を考察することは意味ある問題と言える． 与えられた実数x以下の 2 つの素数の積の個数$\pi_2(x)$については，E. Landau が 20 世紀初頭に得た

$$\pi_2(x) = \frac{x\log\log x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

という古典的な結果が知られている． 一方， 計算機科学で folklore となっていた， 2 つの素数の積p_1p_2であってパラメータrによって 2 つの素数の比が$p_1 < p_2 \le rp_1$と制限されたものの個数$\pi_2(x;r)$の統計的挙動は，2008 年に Decker と Moree によって

$$\pi_2(x;r) = \frac{2x\log r}{(\log x)^2} + O\left(\frac{rx\log 2r}{(\log x)^3}\right)$$

という形で厳密に証明された.上記 2 つの個数関数$\pi_2(x), \pi_2(x;r)$は一番極端な$r = x/4$という場合に一致する：

$$\pi_2\left(x;\frac{x}{4}\right) = \pi_2(x)$$

のだが，上記の Decker-Moree の結果では$r = x/4$とすると誤差項が主要項を凌駕してしまい，Landau の結果と連続的に接続することができない． 一方，$r = x/4$付近の挙動については，2009 年の Justus の結果を多少解釈し直せば

$$\pi_2(x;r)=\frac{x}{\log x}\left(\log\log xr-\log\log\frac{x}{r}\right)+O\left(\frac{x}{(\log x)(\log x/r)}\right)$$

という結果が得られ，$r=x/4$のときにLandau の結果が再現される．しかし，Justus の結果ではrが無限大に向かう場合しか主要項が誤差項を凌駕せず，今度はDecker-Moree の結果を含むことができていない.そこで本研究ではDecker-Moree，Justus，Landau の結果をすべて連続的にカバーするような漸近式を得ることを目標とし，最終的に

$$\pi_2(x;r)=\frac{x}{\log x}\left(\log\log xr-\log\log\frac{x}{r}\right)+O\left(\frac{x\log r}{(\log x)^2(\log x/r)}\right)$$

という漸近式を

$$1+e^{-c\sqrt{\log x}}\le r\le x/4$$

という範囲で一様に得ることに成功した.これは上記 3 つの先行研究をすべてカバーするような結果になっている． 他にも， 短区間中の素数定理を応用することで，rが1に非常に近い場合も含めた漸近式も得ている.さらに,この広範囲で一様な漸近式の知見を用いて， Moree-Saad Eddin が試みた， 上記のような制限付きの２つの素数の積の等差数列中の分布の偏りについても新たな観察を与えた.これは直接的に指数和の研究ではないが， 数論における指数和の応用には，Vaughan の恒等式のような素数の分解に応じて指数和を分解する技法が必要になるため， 指数和の分解に対する基礎理論として位置づけることができる.（この研究は Johannes Kepler University Linz の Sumaia Saad Eddin 氏との共同研究である.）

(2) 素数に関連した級数の無理数性について（D. Duverney 氏，立谷洋平氏との共同研究）

無理数を与える基本的な方法のひとつには digit が非周期的なg進展開を用いる方法がある．g進展開は係数が$0,1,\dots,g-1$に制限されたベキ級数の$1/g$での値だと見ることができるから,より一般の整数係数を持つベキ級数の$1/g$での値の無理数性を考えることは自然な問題である．Chowla やP. Erdős は係数に$r(n)$（整数nの２つの平方数の和による表し方の個数）や$\tau(n)$（約数関数）等を用いた場合の$1/g$における無理数性を示した.このようなDirichlet convolution で表示できる数論的関数のベキ級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{g^n-1}$$

といったようなLambert 級数の形に書き直すことができる．例えば，約数関数の場合は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{g^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g^n-1}$$

と書くことができる.Chowla-Erdős の方法はこの Lambert 級数の無理数性を示す方法であると言える．Erdős は$\nu(n)$（整数nの互いに異なる素因数の個数）を係数に与えた場合のベキ級数の$1/g$での値の無理数性を予想しているが，現在でも未解決である．1968 年,この予想への近似として，Erdős は素数の代わりに，２つずつ項が互いに素であり，逆数和が発散するような自然数の無限列（これをここでは偽素数と呼ぼう）を用いれば,対応する級数の無理性が証明できることを示した.本研究ではこの Erdős の手法を拡張し，一般の Lucas 数列$\{U_n\}$に対して

$$\sum_{\varpi:\text{偽素数}}^{\infty} \frac{1}{U_n}$$

といったような級数の値が$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$に含まれないことを示した.特殊な場合として素数のべき乗番目のフィボナッチ数F_{p^k}の逆数和

$$\sum_{p:\text{素数}}^{\infty} \frac{1}{F_{p^k}}$$

が$k \geq 2$のとき無理数になることが分かる.また関連した級数たちの$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$上の線形独立性を示すことにも成功した.証明のためにEratosthenesの篩にうまくErdősの言うところのtrivial sieveを組み合わせるという手法を駆使した.未だ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{n^k}}$$

というただのべき乗数に渡ったフィボナッチ数の逆数和の無理性は$k=1$の場合にしか知られていないことを見ると, この主結果は興味深い結果であると思える.これも指数和に直接関わる研究ではないが, Vinogradovのように指数和の分解にEratosthenesの篩を用いる際の基礎理論に新たな知見をもたらすものと位置づけられる.(この研究はフランスのDaniel Duverney氏と弘前大学の立谷洋平氏との共同研究である.)

(3) 滑らかな数の分布について (B. Saha氏とA. Sankaranarayanan氏との共同研究)

指数和を双線形形式に分解するときや, Waring問題におけるWooleyの方法を用いる際に重要なのが,滑らかな数に渡る和を考えるというアイデアである. ここで, 「滑らかな数」または「y-smooth number」とは与えられた上限y以下の素因子しか持たない自然数のことを指す.滑らかな数を利用する際には, もちろん滑らかな数の総量について知る必要がある.つまり, 実数x以下のy-smooth numberの個数$\Psi(x,y)$の挙動を知ることが必要になる.この問題についてはDickman(1930)の研究の後, 続いてde Bruijn(1951)が

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right) \quad \text{ただし} \quad u := \frac{\log x}{\log y}$$

が範囲$\exp((\log x)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}) \leq y \leq x$のもとで成り立つことを示した.(ここで$\rho(u)$はDickmanによって得られた遅れのある微分方程式の解である.) しかし, 実際に応用することを考えると, このde Bruijnの成立範囲は狭いものであり, 以後, MaierやHildebrandらにより成立範囲を広げられていった. 最終的にHildebrand-Tenenbaum (1993)は範囲$2 \leq y \leq x$にて

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}}\right)\right)$$

という漸近式を得た. ただしここで

$$\zeta(s,y) := \prod_{p \leq y}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \phi_k(s,y) := \frac{d^k \log\zeta(s,y)}{ds^k}, \quad \phi_k := \phi_k(\alpha,y), \quad \bar{u} := \frac{\min(\log x, y)}{\log y}$$

であり, さらにαは方程式

$$\log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}$$

によって定義される. Hildebrand-Tenenbaumの用いたのは通常のMellin変換に鞍点法による繊細な解析を加えたものである.本研究では,Hildebrand-Tenenbaum の鞍点法の計算をさらに一歩推し進め,

$$\Psi(x,y)=\frac{x^{\alpha}\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2}}\left(1-\frac{1}{\alpha^2\phi_2}+\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{\phi_3}{6\alpha}+\frac{\phi_4}{24}\right)\frac{3}{\phi_2^2}-\frac{5\phi_3^2}{24\phi_2^3}+O\left(\frac{1}{\bar{u}^2}\right)\right)$$

という漸近展開を得た. 指数和の評価の際, 小さなyを含むような滑らかな数を利用する際に応用可能な基礎研究だと位置づけられる.(この研究はハイデラバード大学のBiswajyoti Saha氏とTata基礎研究所のAyyadurai Sankaranarayanan氏との共同研究である.)

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Duverney Daniel、Suzuki Yuta、Tachiya Yohei	４．巻 162
２．論文標題 Linear independence results for sums of reciprocals of Fibonacci and Lucas numbers	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	６．最初と最後の頁 375～392
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10474-020-01060-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Saha Biswajyoti、Sankaranarayanan Ayyadurai、Suzuki Yuta	４．巻 84
２．論文標題 An asymptotic formula and some explicit estimates of the counting function of y-friable numbers	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Various Aspects of Multiple Zeta Functions — in honor of Professor Kohji Matsumoto's 60th birthday, Advanced Studies in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 367～397
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08410367	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Moree Pieter、Saad Eddin Sumaia、Sedunova Alisa、Suzuki Yuta	４．巻 209
２．論文標題 Jordan totient quotients	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Number Theory	６．最初と最後の頁 147～166
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2019.08.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Suzuki Yuta	４．巻 295
２．論文標題 On prime vs. prime power pairs	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Mathematische Zeitschrift	６．最初と最後の頁 681～710
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-019-02384-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Saad Eddin Sumaia、Suzuki Yuta	4．巻 214
2．論文標題 On the distribution of products of two primes	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Number Theory	6．最初と最後の頁 100～136
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2020.04.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　2件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 鈴木雄太
2．発表標題 偶奇の異なる友愛数について
3．学会等名 Darfセミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 鈴木雄太
2．発表標題 偶奇の異なる友愛数について
3．学会等名 津田塾大学整数論ワークショップ　2021（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 鈴木雄太
2．発表標題 素数に関連した Lambert 級数たちの無理性および線形独立性について
3．学会等名 九州代数的整数論2020夏 on Zoom (KANT2020)
4．発表年 2020年

1．発表者名 Yuta Suzuki
2．発表標題 On the irrationality of sums of reciprocals of Fibonacci numbers restricted to prime-like indices
3．学会等名 JENTE Seminar（国際学会）
4．発表年 2020年

1．発表者名 Yuta Suzuki
2．発表標題 On even-odd amicable pairs
3．学会等名 Analytic Number Theory and Related Topics（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Yuta Suzuki
2．発表標題 On relatively prime amicable pairs
3．学会等名 Intercity Number Theory Meeting II（国際学会）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストリア	Johannes Kepler University Linz			