

令和 4 年 6 月 6 日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2021

課題番号：19K23409

研究課題名(和文) 曲面の写像類群とその部分群の群構造

研究課題名(英文) The group structure of the mapping class group of a surface and its subgroups

研究代表者

大森 源城 (Omori, Genki)

東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号：20843303

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：種数が5以下の場合に、向き付け不可能曲面上の全ての対合のDehn twistとcrosscap slideによる積表示を求めた。本研究は、お茶の水女子大学の阪田直樹氏との共同研究である。また、BS写像類群と呼ばれる、ある有向曲面上の周期的写像と対照的な写像類群の有限表示を、東京理科大学の廣瀬進氏との共同研究により与えた。また、BS写像類群が3元生成される事を示した。この生成系は、ある場合を除いて最小のものとなっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面の写像類群は、その曲面をファイバーとする多様体のファイバー構造を介して、様々な次元の多様体のトポロジーと密接に関連しており、特にその中でも低次元多様体論において重要な役割を果たしている。その為、写像類群やその部分群の群構造に関する研究は、低次元トポロジーの発展に繋がる非常に重要な研究である。本研究結果により、曲面が向き付け不可能な場合と向き付け可能な場合の両方の場合において、写像類群やその部分群の群構造の解明に寄与できたと考える。

研究成果の概要(英文)：We gave Dehn twist--crosscap slide presentations for all involutions on non-orientable surfaces of genera up to 5. This work is a joint work with Naoki Sakata at Ochanomizu University.

The BS mapping class group is the symmetric mapping class group for a periodic map on a oriented surface. We gave a finite presentation for the BS mapping class group by a joint work with Susumu Hirose at Tokyo University of Science. Moreover, we proved that the BS mapping class group is generated by three elements. The generating sets are minimal except for several cases.

研究分野：位相幾何学

キーワード：写像類群 周期的写像 向き付け不可能曲面 Dehn twist Crosscap slide 対称的写像類群

1. 研究開始当初の背景

を曲面とした時, の写像類群 $M(\)$ とは, の自己微分同相写像のアイソトピー類からなる群である。ただし, が境界付きの場合は境界を各点で固定するアイソトピー類を考え, 有向曲面の場合は向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類のみを考える事にする。 $M(\)$ は, をファイバーとする多様体のファイバー構造を介して, 様々な次元の多様体のトポロジーと密接に関連しており, 特にその中でも低次元多様体論において重要な役割を果たしている。その為, 写像類群やその部分群の群構造に関する研究は, 低次元トポロジーの発展に繋がる非常に重要な研究である。特にその中でも, 本研究課題においては, 向き付け不可能曲面 N の写像類群 $M(N)$ の簡明な有限表示を与える事と Johnson 核のハンドル体部分群の生成系を構成する事を目標とした。それぞれの研究の背景を以下で述べる。

S をコンパクト有向曲面とする, 写像類群 $M(S)$ の簡明な有限表示は Gervais によって与えられている。この有限表示は, 生成元に表れる Dehn twist を定義する単純閉曲線が S 上に対称的に配置されているのが特徴的である。Gervais はこの有限表示を求める前に $M(S)$ の無限表示を与えた。この表示は無限表示の為生成元や関係式が無数あるものの, 関係式が非常に簡明である。 N をコンパクト向き付け不可能曲面とする。まず, $M(N)$ の簡明な関係式を持つ無限表示が N の境界成分数が 0 と 1 の場合に著者によって与えられた。更にその後, 著者と石川工業高等専門学校の小林竜馬氏との共同研究により, 境界成分数が 2 以上の場合の N に対しても $M(N)$ の簡明な関係式を持つ無限表示を与えた。

以下の研究を行う上でコンパクト有向曲面 S の境界成分数は 0 か 1 とする。 $I(S)$ を S の整係数 1 次ホモロジー群に自明に作用する元からなる $M(S)$ の部分群とし, S の Torelli 群と呼ぶ。Johnson 核 $K(S)$ とは, 定義域を $I(S)$ とする第 1-Johnson 準同型の核の事である。Johnson によって $K(S)$ と $I(S)$ の生成系が与えられている。特に $I(S)$ に関しては, その後 Johnson によって有限生成系も与えられた。また, S を 3 次元球体に標準的に埋め込んだ時に, S を境界とするハンドル体に拡張可能な元からなる $M(S)$ の部分群をハンドル体群と呼び, $M(H)$ と書く。Johnson 核のハンドル体部分群 $K(H)$ とは, $K(S)$ と $M(H)$ の共通部分の事である。 $I(H)$ を $I(S)$ と $M(S)$ の共通部分とし Torelli 群のハンドル体部分群と呼ぶ。著者によって $I(H)$ の簡明な無限生成系が与えられている。 $I(H)$ が有限生成可能かどうかは未解決であり, $K(S)$ については生成系も知られていない。

2. 研究の目的

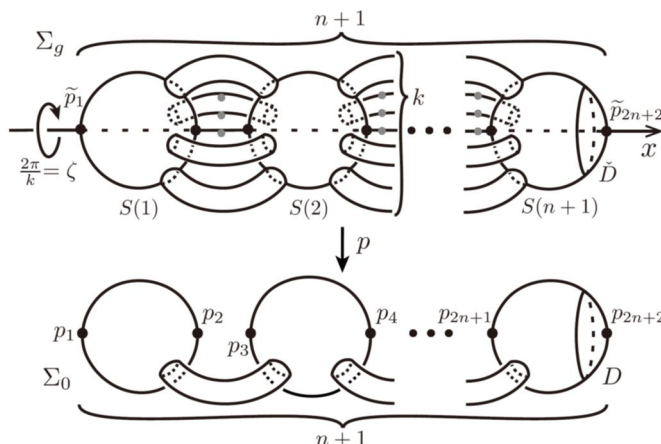
本研究の目的は $M(\)$ やその部分群の群構造を解明する事である。特に, 本研究課題では, 向き付け不可能曲面 N の写像類群 $M(N)$ の簡明な有限表示や Johnson 核のハンドル体部分群の生成系を構成する事を目的とした。

3. 研究の方法

まず, $M(N)$ の簡明な有限表示を構成する為に, 既に知られている $M(N)$ の有限表示の関係式が, どのような簡明な関係式の帰結になるかを考察する。この際, 過去に行った $M(N)$ の無限表示に関する研究での議論を参考に, どのようなタイプの関係式が実際に必要かについて考察を行う。また, $M(N)$ の関係式について理解を深める為, N の対合の Dehn twist と crosscap slide による積表示 (以下, DC 表示) の構成を行う。ここで対合とは, 2 回合成すると恒等写像になる微分同相写像の事である。この 2 乗すると単位元になるという性質から, 対合の DC 表示を与える事で $M(N)$ の Dehn twist と crosscap slide による関係式が得られる為, 対合の DC 表示に関する研究は, $M(N)$ の表示を構成する上で非常に重要な研究である。

次に, $K(H)$ の生成系の構成は以下の方針で行う。定義から, $K(H)$ は $I(H)$ の部分群であった。 $K(H)$ の生成系の候補が生成する $K(H)$ の部分群を T とした時, 商 $I(H)/T$ が第 1-Johnson 準同型による $I(H)$ の像と同型になる事を示す事で $K(H)$ と T が一致する事を示す。

また, Torelli 群の群構造を理解する為に, $I(S)$ の部分群の群構造を理解する事は非常に重要である。Brendle-Margalit-Putman によって, Hyperelliptic 写像類群と $I(S)$ との共通部分である hyperelliptic Torelli 群の生成系が与えられた。そのある種の一般化である balanced superelliptic 写像類群 (以下, BS 写像類群) と $I(S)$ の共通部分である BS Torelli 群の生成系について考える。ここで, BS 写像類群とは, 右図上部のような $S = \Sigma_g$ の $1/k$ -



回転が生成する群を共役作用で保つような $M(S)$ の部分群である．この周期 k が 2 の場合が hyperelliptic 写像類群である．BS Torelli 群の生成系に関する研究を行う前段階として，BS 写像類群の生成系や関係式について考察する．

4．研究成果

向き付け不可能曲面に関する研究については，種数が 5 以下の向き付け不可能曲面上の全ての対合の DC 表示を求めた．本研究は，お茶の水女子大学の阪田直樹氏との共同研究である．本研究において，種数が 5 以下の場合に，奇数種数の向き付け不可能曲面上の全ての対合は，一つ種数が低い向き付け不可能曲面上のある対合の固定点を blowup する事で得られる事が分かった．これが，高種数の場合に成り立つかどうかは今後の課題である．

有向曲面に関する研究については，1 つ点付き，1 つ境界付き，閉曲面の 3 つの場合の BS 写像類群の有限表示を，東京理科大学の廣瀬進氏との共同研究により与えた．BS 写像類群には，それに対応する liftable 写像類群と呼ばれるものがあるが，BS 写像類群の有限表示を与える為に上の 3 つの場合に対応する liftable 写像類群の有限表示を構成した．閉曲面の場合に対応する liftable 写像類群の有限表示は Ghaswala-Winarski によって既に与えられているが，今回与えた有限表示は彼らのものとは生成元が異なり，関係式が非常に簡明なものとなっている．また，上で考えた BS 写像類群と liftable 写像類群が 3 元生成される事も示した．アーベル化の生成元の個数との評価により，この生成系は，閉曲面のある場合を除いて最小となる事が分かる．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ryoma Kobayashi, Genki Omori	4. 巻 59
2. 論文標題 An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface with boundary	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 269, 314
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 大森源城
2. 発表標題 種数5以下の向き付け不可能曲面上のinvolutionのDehn twist-crosscap slide表示について
3. 学会等名 研究集会「拡大K00Kセミナー2020」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大森源城
2. 発表標題 Dehn twist-crosscap slide presentations for involutions on non-orientable surfaces of genera up to 5
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大森源城
2. 発表標題 種数5以下の向き付け不可能曲面上の対合のDehn twist-crosscap slide表示について
3. 学会等名 研究集会「Hurwitz action online ~フルピッツ作用とその周辺~」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大森源城
2. 発表標題 種数4と5の場合の向き付け不可能曲面上のinvolutionのDehn twist-crosscap slide表示について
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------