

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：13801

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2019～2022

課題番号：19K23410

研究課題名（和文）被覆グラフ上のランダムウォークの極限定理に関する多角的研究

研究課題名（英文）Studies on limit theorems for random walks on covering graphs

研究代表者

難波 隆弥（Namba, Ryuya）

静岡大学・教育学部・講師

研究者番号：20843981

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：被覆グラフ等の無限グラフ上のランダムウォークの極限定理に関して、ランダムウォークの非対称性、極限過程の不連続性、底空間の非可換性の3つに焦点を当てて研究を行った。特に、ベキ零群を被覆変換群とするベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークに関して、中心極限定理およびその精密化としてのEdgeworth展開を得ることができ、論文が出版された。またランダムウォークの長時間挙動に関わる問題として、Trotterの半群収束定理の精密化や有限グラフ上の熱核に関する話題、Riemannゼータ分布の畳み込みの長時間挙動に関して研究を行い、それぞれにおいて論文の形として世に出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

前研究課題並びに本研究課題の中で、ベキ零被覆グラフ上のランダムウォークの極限定理に関して、中心極限定理や大偏差原理、重複対数の法則などの一連の基本的な結果を示すことができた。これらにより、ベキ零の非可換性をもつ設定における極限定理はよく理解されたと言ってよい状況にまで進展した。さらにTrotterの半群収束定理の改良を行ったことにより、半群の収束が現れる様々な局面で新しい数学の発展が見込めるといって十分意義のある研究ができたと自負している。

研究成果の概要（英文）：I studied limit theorems for random walks on some infinite graphs such as covering graphs, by focusing on the non-symmetry of random walks, the discontinuousness of limiting stochastic processes, and non-commutativity of underlying spaces. As a result, I established central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs, together with its Edgeworth expansion. I also consider some problems related to limit theorems for various kinds of random walks. In particular, I have obtained a refinement of the celebrated Trotter's approximation theorem, a partial result on some property of heat kernels on finite graphs, and the long time behavior of the convolution power of the Riemann zeta distribution.

研究分野：確率論

キーワード：被覆グラフの収束理論 中心極限定理 重複対数の法則 Edgeworth展開 ランダムウォーク 離散幾何解析 半群多重ゼータ関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

被覆グラフとは、有限生成な無限離散群の作用により有限グラフを被覆してできる無限グラフである。被覆変換群が可換であるような被覆グラフは特に結晶格子とよばれ、2000年頃より、幾何学者である小谷元子氏、砂田利一氏を中心に研究がなされてきた。氏らは結晶格子上の対称ランダムウォークについて考察し、結晶格子の最も幾何学的な配位を表す調和実現の概念を導入した。この概念の導入の中で、氏らは「離散幾何解析」なる領域を創始し、この援用により、さまざまなランダムウォークの極限定理を得てきた。これら一連の結果を見直すとき、

- (1) 結晶格子上のランダムウォークが「対称」であったこと、
- (2) 極限定理を通じてとらえた確率過程(Brown運動)が「連続」であったこと、
- (3) 結晶格子に対応する被覆変換群が「可換」であること、

の3つの要素が重要な役割を果たしてきたことが確認できた。一方で、これら3要素のうちいずれかが欠けた場合、ランダムウォークの極限定理に関する結果はかなり少なくなる。本研究は「非対称」、「不連続」、「非可換」な状況下でどのような極限定理がどのくらい構築できるかという新たな展開を目指して開始されたものである。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記で述べた状況並びに前研究課題(課題番号:18J10225)で行った研究から派生する自然な方向性を考慮して、目的を以下の3つの研究を行うことと設定した。

(Q1): 非可換群であるベキ零群を被覆変換群とする被覆グラフ(ベキ零被覆グラフ)上の非対称ランダムウォークの n ステップ推移確率の収束速度評価(Berry-Esseen型評価)を示す。また、このとき非対称性やグラフの幾何学的性質は速度評価にどんな影響を与えるか調べる。

(Q2): Lévy過程のような不連続な見本路をもつ確率過程を被覆グラフ上の極限定理を通じて捉える。その際、極限として捉えた Lévy過程に対応する Lévy triplet にどのようなグラフの幾何学的性質が反映されるかについて調べる。

(Q3): より広いクラスの非可換群(例えば可解群)およびそれを被覆変換群とする被覆グラフ上のランダムウォークに関する極限定理を得る。

3. 研究の方法

研究課題の遂行に関する機器や文献を購入し、共同研究者や専門家等の意見を仰ぎながら、自らの手で考察、検証、計算を行った。本研究期間の中で一度 Imperial College London への出張を行い、現地の定例セミナーで自身の結果に関する講演を行う機会を得ることができた。また、最新の研究の動向を把握するために、関連する分野の研究集会やセミナー、専門家との研究打合せを多数行った。

一方で、新型コロナウイルスの感染拡大により、2020年度に予定していた出張計画を大幅に変更することとなった。さらには2021年度、2022年度の2年間にわたり本研究課題を延長することになったため、2年目以降は当初定めた研究の目的とは大きく方向性の異なる研究を行った。

4. 研究成果

- (1) 前研究課題より継続して考察したベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークの中心極限定理に関する石渡氏、河備氏との共同研究に関する論文2編、並びにベキ零被覆グラフ上のランダムウォークの重複対数の法則に関する論文のブラッシュアップを行い、本研究課題期間中に掲載が決定した。
- (2) 被覆グラフ上のランダムウォークの極限定理について、特に「非対称」、「非可換」という観点から研究を行った。前研究課題で得ていたベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークの中心極限定理のさらなる精密化として、その誤差評価である Berry-Esseen 型評価およびその漸近展開である Edgeworth 展開を得た。さらに、Edgeworth 展開に現れる係数をベキ零被覆グラフが自然に埋め込まれるベキ零 Lie 群上の熱核測度のある種の積分により具体

的に記述することができた。これら一連の結果は論文の形に整理され、国外専門誌へ掲載することができた。

- (3) 関数解析および近似理論で有名な Trotter の半群収束定理は我々が被覆グラフ上のランダムウォークの中心極限定理を証明する際に基本的かつ本質的な道具である。しかし、Trotter の半群収束定理はその誤差の定量的な評価までは主張しない。Campiti と Tacelli は Trotter の半群収束定理の収束レートを半群に対応する生成作用素のいわゆる Voronovskaya 型評価の言葉で具体的に与えたが、現れる半群がすべて同じ Banach 空間上で定義されていなければ使うことができないなど、汎用性がやや低かった。そこで、彼らの結果を半群が定義される Banach 空間の設定を可能な限り一般化することで拡張し、証明を与えることに成功した。元々は(1)で示した Berry-Esseen 型評価を得るために Trotter の半群収束定理をなんとか改良できないかという思惑からたどりついた結果であり、普段から広い視野をもち研究に向かうことの重要性を再認識することができた。この結果についても論文の形にまとめ、発表することができた。
- (4) 被覆グラフ上のランダムウォークを考えると、その商グラフ(有限グラフ)上のランダムウォークを考えるとほぼ同じことであるので、有限グラフのランダムウォークの振る舞いについて調べることもまた本研究課題においては重要である。その中で、Peres が提唱した予想「すべての頂点推移的有限グラフ上の連続時間ランダムウォークの熱核の対角成分と非対角成分の比を(2 頂点を固定して)時刻の関数とみなしたとき、それは単調増加である」に関連した問題を、元大学院生の九保氏と考察した。その結果、グラフラプラシアンが 4 つの異なる固有値をもつような二部グラフにおいてはその予想が正しいということを証明した。証明の中で、グラフ理論において有名な 2-デザイン理論をうまく援用して固有値に関する量の評価を行うテクニックを用いた点が本質的である。また、いくつかの新しい示唆を含む例も提示することができた。これらの結果も共著論文としてまとめ、学術誌へ掲載した。
- (5) 青山氏と共同で、2 つの多重ゼータ関数を結晶格子上に定義し、その確率論への応用を調べている。特にこれらのゼータ関数の正規化が、結晶格子上に無限個の重みをもつ多次元確率分布の特性関数に対応することから、その畳み込みをとることで結晶格子上の(一般には無限の跳躍を含む)ランダムウォークが構成できる。この観点から、無限個の点に重みをもつ確率分布の畳み込みの長時間挙動を調べることは重要であると考え、青山氏および元大学院生の大田氏と共同研究を行った。特に、そのような確率分布の最も簡単な例の 1 つである Riemann ゼータ分布に注目し、その畳み込みの局所極限定理を示した。さらに極限の主要項を Riemann ゼータ関数の特殊値の言葉で具体的に記述した。次の研究課題以降で、このような話を発展させ、無限個の点に重みをもつ確率分布の畳み込みにより得られる様々なランダムウォークの極限定理の構築ができるものと期待している。この結果もまた論文の形として整理され、国外総合誌へ掲載された。
- (6) (3)で示した Trotter の半群収束定理の精密化の応用例の 1 つとして、正值線形作用素の反復により得られる半群の極限を調べる問題が考えられる。特に、閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数を一様に近似することで古くより知られる Bernstein 作用素についてはその反復がよく調べられている。そこで、赤堀氏および元大学院生の仙葉氏と共同研究を行い、Bernstein 作用素の半直線上への拡張である Szász-Mirakyan 作用素の反復の極限を調べ、ある確率微分方程式の解に対応する拡散半群へ収束することを証明した。さらに(3)で得た結果を援用することで、その収束レートまで導くことができた。この種の連続関数を近似する作用素の反復には自然にランダムウォークが対応することが知られている。作用素の反復の極限の研究には、従前より近似理論的手法を用いることが普通であったが、確率論的な視点加わることによってさらなる発展が見込めるのではと期待している。今回得た結果については、既に論文の形に整理し国外の専門誌へ掲載されていることを付記する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Aoyama Takahiro, Namba Ryuya, Ota Koki	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic behaviors of convolution powers of the Riemann zeta distribution	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Lithuanian Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10986-023-09585-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akahori Jiro, Namba Ryuya, Semba Shunsuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Limit Theorems for Iterates of the Szasz-Mirakyan Operator in Probabilistic View	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-022-01199-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Namba Ryuya	4. 巻 -
2. 論文標題 Rate of Convergence in Trotter's Approximation Theorem and Its Applications	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179372	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Namba Ryuya	4. 巻 -
2. 論文標題 Edgeworth Expansions for Centered Random Walks on Covering Graphs of Polynomial Volume Growth	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-021-01111-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubo Tasuku, Namba Ryuya	4. 巻 38
2. 論文標題 Monotonic Normalized Heat Diffusion for Regular Bipartite Graphs with Four Eigenvalues	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02424-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishiwata Satoshi, Kawabi Hiroshi, Namba Ryuya	4. 巻 25
2. 論文標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs: Part I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/20-EJP486	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ishiwata Satoshi, Kawabi Hiroshi, Namba Ryuya	4. 巻 -
2. 論文標題 Central Limit Theorems for Non-Symmetric Random Walks on Nilpotent Covering Graphs: Part II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11118-020-09851-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Namba Ryuya	4. 巻 33
2. 論文標題 Laws of the iterated logarithm on covering graphs with groups of polynomial volume growth	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 129-145
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2020-0070	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 石渡聡、河備浩司、難波隆弥	4. 巻 2116
2. 論文標題 CLT for random walks on nilpotent covering graphs with weak asymmetry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 10-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 Trotterの半群収束定理の精密化とその応用
3. 学会等名 東京確率論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 離散群上のランダムウォークの極限定理
3. 学会等名 第6回幾何学的群論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 Long-time asymptotics of random walks on covering graphs of polynomial volume growth
3. 学会等名 立命館幾何セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 Long time asymptotics of random walks on covering graphs with groups of polynomial volume growth
3. 学会等名 東北幾何セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 RWs on covering graphs with groups of polynomial volume growth via discrete geometric analysis
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 Edgeworth expansions on covering graphs in a geometric view
3. 学会等名 広島幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Moderate deviation principles on covering graphs of polynomial volume growth and its applications
3. 学会等名 阪大確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Moderate deviation principles on covering graphs of polynomial volume growth and its applications
3. 学会等名 東京確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Laws of the iterated logarithm on covering graphs of polynomial volume growth
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Laws of the iterated logarithm on covering graphs of polynomial volume growth
3. 学会等名 Geometry and Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Laws of the iterated logarithm on covering graphs of polynomial volume growth
3. 学会等名 関西確率論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ryuya NAMBA
2. 発表標題 Laws of the iterated logarithm on covering graphs of polynomial volume growth
3. 学会等名 確率論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 難波 隆弥
2. 発表標題 多次元結晶格子と多重ゼータ関数を結ぶ幾何学のおよび確率論の性質
3. 学会等名 名古屋確率論セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata, Hiroshi Kawabi and Ryuya NAMBA
2. 発表標題 CLTs for non-symmetric RWs on nilpotent covering graphs and its relation with a Brownian rough path with a linear drift
3. 学会等名 Stochastic Analysis Seminar at Imperial College London (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------