

令和 6 年 9 月 30 日現在

機関番号： 11301

研究種目： 国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間： 2020～2023

課題番号： 19KK0349

研究課題名（和文）対数型特異性を伴う臨界問題の解析手法開発

研究課題名（英文）Development of analysis method for critical problems with logarithmic singularity

研究代表者

猪奥 倫左（Ioku, Norisuke）

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号： 50624607

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 9,600,000円

渡航期間： 10ヶ月

研究成果の概要（和文）：対数型特異性を伴う臨界問題として、特に指数型非線形項を持つ半線形熱方程式・半線形楕円型方程式の解析、および臨界関数不等式の解析、に取り組んだ。前者については特異解の構成および一意性に対して、モデルケースとなる非線形項を発見し、それに一般非線形項の解析を帰着される新手法を開発した。また、後者については、臨界問題に現れる対数型特異性を、 $q$ 対数関数と呼ばれる冪乗近似を用いて劣臨界問題の極限問題として記述することに成功し、それを用いてTrudinger--Moser不等式の集中レベルがTalenti関数の極限として記述できるという新現象を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

半線形放物型・楕円型方程式は、これまでは冪乗非線形項といった理想的状況下において研究されることが多かった。冪乗非線形項はそのシンプルな見た目に反して豊富な数学的現象を提起するため、多くの関心を集めて深く理解されている。一方で、複雑なこの世界を理解するためには理想的状況の解析だけでは不十分であることも事実である。一般の指数増大度を持つ非線形項を扱うことを可能にした本研究は学術的・社会的に意義深いと考えられる。また、対数型特異性に対して体系的な研究手法はこれまでに十分に開発されてこなかった。本研究で提案した劣臨界近似法は、他の対数型特異性を伴う臨界問題にも応用可能であるため高い学術的意義を持つ。

研究成果の概要（英文）：As a critical problem with a logarithmic singularity, I focused on the analysis of semi-linear heat equations and semi-linear elliptic equations with exponential nonlinearity, and the analysis of critical functional inequalities. For the former research, we discovered the model case of nonlinear terms, and developed a new method to reduce the analysis of general nonlinear terms into the model case. Regarding the latter, we succeeded in converting the logarithmic singularity that appears in the critical problem into a limit problem of subcritical problems by using a power approximation called the  $q$ -logarithm function, and using this, we showed that the concentration level of the Trudinger--Moser inequality can be regarded as the limit form of the concentration level of Sobolev inequality attained by Talenti's function.

研究分野： 偏微分方程式論

キーワード： スケール不変性 対数型特異性 劣臨界近似 指数型非線形項

### 1. 研究開始当初の背景

対数型特異性は、臨界次元における偏微分方程式の解析や基本解の挙動、熱方程式の爆発時刻の評価に現れ、この特異性は通常のスケール不変構造を壊すために各種の解析を困難にすることが観察されていた。一方、先行研究により、対数関数に適合した非線形スケール不変性が発見されていたが、その応用可能性や通常のスケール不変性との関係は未解明の状態に残されていた。これについて、基課題では、ツァリス統計力学で導入された  $q$ -対数関数の理論に着目し、全空間上の伸縮不変性と球上の非線形スケール不変性の関連性を明らかにした。これは対数型特異性が満たす非線形伸縮不変性は、通常の伸縮不変性の極限型として捉えられることを示しており、各種の臨界問題が劣臨界問題で近似できることを示唆している。

### 2. 研究の目的

以上の背景のもと、本研究では劣臨界問題を臨界問題の連続極限として近似する包括的な解析手法を構築するために、特に次の二つを研究目的とした。

1. 基課題で統合した非線形スケール不変則を発展させ、一般領域上のスケール不変則を構築し、エネルギー劣臨界・臨界状態を統一する包括的な関数不等式を導出する。
2.  $q$ -対数関数を用いてエネルギー劣臨界問題を劣臨界問題の連続極限として表示することで、対数型特異性を伴う偏微分方程式に対する汎用的な解析手法を開拓する。

### 3. 研究の方法

研究目的を達成するために、Firenze 大学の Andrea Cianchi 氏および Milano 大学の Bernhard Ruf 氏と共同研究を行った。

目的 1 について、Firenze 大学の Andrea Cianchi 氏と共同研究を行った。関数不等式の一つである Hardy 不等式について、微分作用素を分数階にしてもある条件においては臨界性が保たれることが知られている。本研究では球上での Trudinger-Moser 不等式に加えて分数階臨界 Hardy 不等式についても研究を行った。また、Cianchi 氏が所属する Firenze 大学は幾何解析の国際的拠点の一つであり、R. Magnanini 氏、P. Salani 氏、A. Colessanti 氏、A. Bianchi 氏ら多くの著名な幾何解析学者を擁する。Firenze 大学滞在中には彼らとも頻繁に議論を交わすことで本研究を推進した。

目的 2 について、 $q$ -対数関数の双対である  $q$ -指数関数を用いて指数関数の劣臨界近似を与え、近似問題が元の臨界問題へ収束することを確認した。収束の意味として、主に、集中レベルの収束、関数不等式の収束、最大化点と最大値の収束などがある。本研究では特に集中レベルの収束から始め、関数不等式への収束、最大化点の収束へと議論を進める。関数不等式の収束性から先の議論については、パラメータに関する関数不等式の一様有界性が肝となるため、これについて考察した。一様有界性までは得られなかったものの、集中レベルの収束性を得ることができた。また、Ruf 氏が所属する Milano 大学の研究チームには、E. Terraneo 氏、F. Sani 氏、C. Tarsi 氏ら、臨界問題に関する専門家が多く在籍しているため、彼らとも頻繁に議論を交わすことによって研究を推進した。特に、Ruf 氏、Terraneo 氏と、関連する問題として指数型非線形項を持つ 2 次元臨界楕円型方程式に対して特異定常解を共同研究として構成した。さらに得られた結果を対応する熱方程式の解の多重存在定理へと応用した。

### 4. 研究成果

対数型特異性を伴う臨界問題として、特に指数型非線形項を持つ半線形熱方程式・半線形楕円型方程式の解析、および臨界関数不等式の解析、に取り組んだ。

前者については特異解の構成および非一意性に対して、モデルケースとなる非線形項を発見し、それに一般非線形項の解析を帰着される新手法を開発した。特に半線形熱方程式の一意性と非一意性について研究を行った。Ni-Sacks に端を発する非一意性の研究は特異定常解の構成が鍵となる。この特異定常解の構造が、非線形項の増大度に応じて劇的に変化することが知られている。具体的には、べき乗型の非線形項を次元が 3 以上の空間で考察すると、ある臨界指数が存在して、べき乗指数を変化させるとき臨界指数を境に特異定常解の斉次性が壊れる。一方、空間次元が 2 の場合には、臨界指数は形式的に無限大となり、べき乗非線形項は全て劣臨界としての振る舞いを見せる。本研究では空間 2 次元の場合にべき乗指数よりも真に強い非線形性、特に指数増大する非線形項を考察し、特異定常解とそこから分岐する滑らかな解を構成することで、3 次元以上の臨界および優臨界に相当する結果を得た。その過程において、これまでの代表者の研究を発展させることでべき乗特有の従来証明方法を改良し、一般的な指数増大度を持つ非線形項に対する特異定常解の構成方法を提案した。本結果は先行研究 (Ibrahim-Kikuchi-Nakanishi-Wei および Ioku-Ruf-Terraneo) を完全に含むものである。得

られた結果は Milano 大学の Bernhard Ruf 氏 ,Elide Terraneo 氏との共同研究として , 欧文専門誌に論文を投稿中である . 後者については , 臨界問題に現れる対数型特異性を ,  $q$  対数関数と呼ばれる冪乗近似を用いて劣臨界問題の極限問題として記述することに成功し , それを用いて Trudinger--Moser 不等式の集中レベルが Talenti 関数の極限として記述できるという新現象を見出した . この結果をまとめた論文は Proceedings of the American Mathematical Society, 151 (2023), 4279--4289. に出版済みである . さらに , 臨界関数空間の一つの表示として知られる BSY の公式を Orlicz 空間に拡張した . この結果は Journal of Mathematical Analysis and Applications, 538 (2024), no. 2, Paper No. 128350. に出版済みである . さらに , Firenze 大学の Andrea Cianchi 氏と共に , 関連する臨界関数不等式として , 分数階微分指数を持つ空間における Hardy 不等式の構築に取り組んだ . 分数階微分はポテンシャル論から自然に導出された概念であり , 境界からの距離関数を重みとして持つ Hardy 不等式は領域の幾何的性質と密接に関連して近年盛んに研究されている . 本研究では分数階微分指数を持つ空間の特徴づけとして Gagliardo セミノルムを採用し , 考察する領域に Lipschitz 境界条件を課すことで Hardy 不等式が成り立つための可積分性に対する条件を特定した . 現在は結果を論文としてまとめている .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. Hashizume, N. Ioku	4. 巻 151
2. 論文標題 $W^{1,p}$ approximation of the Moser-Trudinger inequality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4279-4289
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Ioku, K. Shibuya	4. 巻 538
2. 論文標題 Brezis-Van Schaftingen-Yung formula in Orlicz spaces	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 128350
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2024.128350	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 N. Ioku
2. 発表標題 $W^{1,p}$ approximation of the Moser-Trudinger inequality
3. 学会等名 Analysis seminar, Firenze University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 N. Ioku
2. 発表標題 Solvability of a semilinear heat equation via quasi scale invariance
3. 学会等名 EACDFM (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 N. Ioku
2. 発表標題 $W^{1,p}$ approximation of the Moser-Trudinger inequality
3. 学会等名 Analysis seminar, Milano University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ルフ  (Ruf Bernhard)	ミラノ大学・Dipartimento di Matematica・Professor	2022年10月に退職され、その後の所属はロンバルディア州アカデミーに変更になった。
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	テラネオ  (Terraneo Elide)	ミラノ大学・Dipartimento di Matematica・Associate Professor	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	チアンキ  (Cianchi Andrea)	フィレンツェ大学・Dipartimento di Matematica e Informatica 'Ulisse Dini''・Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関