

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5 月 27日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（S）

研究期間：2008～2012

課題番号：20224013

研究課題名（和文） 非線形偏微分方程式の大域的適切性

研究課題名（英文） Theory of global well-posedness on the nonlinear partial differential equations

研究代表者

小藺 英雄 (KOZONO HIDEO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：00195728

研究成果の概要（和文）：まず Keller-Segel 方程式系の解の局所存在定理と有限時間爆発について考察した。一般高次元の領域において，放物型－楕円型の半線型 Keller-Segel 方程式系の Cauchy 問題に対して，初期データが可積分および p -乗可積分空間に属するとき，解の局所存在時間の特徴付けを行った。また，初期データの全積分量と2次モーメントの比が，解の有限時刻における爆発にどのような影響を及ぼすかを方程式に現れる係数との相関も含めて明らかにした。応用として，解の爆発時刻付近での漸近挙動は， p に依存して決まる一定の指数オーダーの比率で爆発するのか，あるいは全積分量がある定数以上の振幅で振動するかの二者択一であることを証明した。次に多重連結領域における非斉次境界条件下での Navier-Stokes 方程式の定常問題を考察した。与えられた境界値がそれぞれの境界の連結成分における流量の総和がゼロという条件下では同問題の可解性は未解決である。本研究では，境界値の領域全体へのソレノイダル拡張されたベクトル場の調和部分が非自明な定常 Euler 方程式系から決まる圧力勾配と直交していれば，すべての粘性係数について可解であることを証明した。更に応用として，Leray の不等式の整合性と領域の位相幾何学的な性質との関連を特徴づけた。

研究成果の概要（英文）：We investigate the local existence of strong solutions and their blow-up within a finite time in arbitrary dimensional domains. The life-span of local solutions is characterized in terms of the L^1 and L^p -norms of the given initial data. Simultaneously, it is clarified that the total mass and the second momentum of the initial data together with the coefficient of the system of equations have a great influence on the blow-up phenomena. As an application, we prove that the blow-up solution either exhibits a definite blow-up rate determined by p , or oscillates in L^1 with the larger amplitude than the absolute constant. Furthermore, in multi-connected domains, it is still an open question whether there does exist a solution of the stationary Navier-Stokes equations with the inhomogeneous boundary data whose total flux is zero. The relation between the nonlinear structure of the equations and the topological invariance of the domain plays an important role for the solvability of this problem. We prove that if the harmonic part of solenoidal extensions of the given boundary data associated with the second Betti number of the domain is orthogonal to non-trivial solutions of the Euler equations, then there exists a solution for any viscosity constant. The relation between Leray's inequality and the topological type of the domain is also clarified.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	24,400,000	7,320,000	31,720,000
2009年度	26,600,000	7,980,000	34,580,000
2010年度	27,200,000	8,160,000	35,360,000
2011年度	27,200,000	8,160,000	35,360,000
2012年度	0	0	0
総計	105,400,000	31,620,000	137,020,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学解析

キーワード：非線形解析学，偏微分方程式論，調和解析学，関数解析学

1. 研究開始当初の背景

Navier-Stokes 方程式はカオスやフラクタル等，非線形特有の現象を引き出すことのできる典型的モデルとして，理論および工学実験両方の研究者から注目されてきた．偏微分方程式論の基本的問題である解の適切性の問題，とりわけ大きな初期データに対する時間大域的な古典解の存在は，ミレニアムの数学難問題 7 題の 1 つとしてクレア研究所が懸賞付き（百万ドル）で提唱している．また，ローレンツ計量をもつリーマン多様体上でのヤン-ミルズ方程式は，非線形波動方程式の初期値問題の大域的可解性に帰着される．ゲージ不変な解の構成もまた同研究所の懸賞付きの一題である．このように本研究の対象は，非線形偏微分方程式のみに留まらず，Riemann 予想と同等に取り扱われている数学全体に大きな影響を及ぼす課題である．

2. 研究の目的

数理解物理学の基礎方程式，数理生物学のモデルである非線形偏微分方程式を広範囲に渡って対象とし，解の存在，一意性，安定性といった“適切性”を研究する．

(1) **定常方程式**については，単に全空間だけでなく，内部境界値問題の場合には，種数など領域の位相不変量が方程式の可解性に与える影響をも対象とする．

(2) **外部境界値問題**においては，障害物の形状に依存した解の非等方的な振る舞い，あるいは無限遠方における解の挙動の一意性への寄与を考察する．

(3) **時間発展方程式**については，局所適切性にとどまらず，例えば初期データが属する関数空間のノルムの最良定数を求めることにより時間大域的可解性を明らかにする．

このように対象とする領域の形状や空間・時間無限大での解の漸近挙動といった“大域的性質”を解析し，非線形偏微分方程式の解の構造に関して統一理論を構築することが本研究の目的である．

3. 研究の方法

(1) **研究集会の開催**：“流体力学の基礎方程式および非線形波動・分散型方程式の解の正則性及び安定性”をテーマとして国際研究集会を開催する．単なる個人の研究の発表の場を提供するのではなく，最近の流体の基礎方程式の研究発展紹介，また関連分野，特にシュレディンガー方程式，KdV 方程式の結果の解説などを取り入れる．更に，実関数論的手法の導入も考慮する．研究集会の成果を広く

公表するために，従来の会議報告集とは異なり，今後の研究の指針となるような入門的な講義録を出版する．

(2) **研究班およびその支援グループの構成**：研究目的に応じて，流体力学の基礎方程式研究班，反応拡散系方程式研究班，波動・分散型方程式研究班を構成する．またこれら研究班の活動を支援するために，非線形分散型方程式，実関数論，線形スペクトル解析退化準線形型方程式の分野で顕著な業績を挙げている国内研究者を定期的に招聘し助言を得る．

(3) **国際シンポジウムへの参加**：毎年定期的に行われている流体力学の基礎方程式の国際研究集会に出席し，研究成果を発表するとともに，最新の研究情報を収集する．

(4) **研究支援者の雇用**：多くの外部競争的資金により任期つき研究者の雇用が全国で盛んに行われている．これらの若手研究者には優秀な人材が少なくなく，多くは継続雇用が望まれる．本研究では，彼・彼女らを研究支援者として雇用する．

4. 研究成果

(1) **多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式に関する Leray の問題についての考察**：境界が有限個の滑らかな曲面からなる 3 次元空間内の多重連結領域において，与えられた境界値の全流量がゼロという条件下での定常 Navier-Stokes 方程式の可解性は，Leray によって提唱され 80 年に渡る未解決問題である．この難問に対して，3 次元ベクトル場に関する Helmholtz 分解を用いて境界値を領域内部にソレノイダルベクトル場として拡張をしたときに，その調和部分の L^3 -ノルムが粘性係数に比較して小ならば，可解であることを証明した．実際，ソレノイダル拡張されたベクトル場は，与えられた境界値からは一意的に定まらないが，その調和部分は，境界の各成分における流量によってのみ決定されることが本質であることを指摘した．また，証明の際鍵となる低階の摂動項をもつ Stokes 作用素の正值性を保障する Leray の不等式と，定常 Euler 方程式の非自明解の関係を明らかにした．また 2 次元平面内の線対称の領域においては，Amick-藤田によって証明された線対称のソレノイダルベクトル場に対する Leray の不等式に対して新たな知見を与えた．

(2) **高次元 Keller-Segel 方程式系の古典解の時間大域解の存在について**：空間次元が 3

以上の全空間において放物-放物型 Keller-Segel 方程式系の Cauchy 問題を考える. 初期条件がスケール変換に関して不変な関数空間において十分小さいならば, 時間大域的古典解が一意的に存在することを証明した. 証明方法は線形化方程式の摂動論の適用である. その際, 熱半群の L^p - L^q -評価式と Laplace 作用素の分数冪が重要な役割を果たす. 副産物として解の時間無限大における挙動を明らかにすることができた.

(3) **全質量有限なクラスにおける Keller-Segel 方程式系の後方自己相似解の非存在:** 2次元平面領域における Keller-Segel 方程式系は, 大きな初期データに対する爆発解の存在が知られている. 一方, 時間大域解の存在はいずれの空間次元においても小さな初期データに対しては保障されている. このような状況下で爆発解の挙動は同方程式における重要な未解決問題である. 特にその爆発解がタイプ I 型, すなわち自己相似構造から決定され発散指数に従って時間増大するのか, あるいはそれよりも急激な発散を催すタイプ II 型であるかは関しての考察には, 差し当たり後方自己相似解の存在・非存在が出発点となる. 本研究では全質量が有限である解のクラスを考察した. その範囲で放物-放物型ではすべての次元において, 放物-楕円型では3次元以上においていずれも後方自己相似解は存在しないことを証明した.

(4) **一般領域における Stokes 作用素について:** Stokes 作用素の L^q -理論は $q=2$ の場合を除き, 一般の領域では定義が出来ないことが知られている. そこで, 反例が構成されている非コンパクトな境界 n 次元空間内の非有界領域を取り扱った. L^q -空間に代わるものとして, $1 < q < 2$ においては L^{2q} -空間と L^q -空間の和集合, $2 < q$ においては, L^{2q} -空間と L^q -空間の共通集合を導入した. その結果, 領域の境界が一様に C^1 -級であれば, 非コンパクト領域においても Stokes 作用素は, これら関数空間において定義可能であり, 正則半群を生成しかつ最大正則性定理を満たすことが明らかにされた.

(5) **平行平板間の Couette 流の安定性について:** n 次元空間内の無限平行平板における Couette 流に対して, 流れの一方方向に周期的な初期擾乱を与えた場合, その L^n -ノルムが小さければ指数的に安定であることを証明した. 尚, 得られた指数安定性は任意の Reynolds 数において成り立つ.

(6) **3次元有界領域における L^r -Helmholtz-Weyle 分解:** 3次元の滑か

らな境界をもつ有界領域における L^r -ベクトル場 u は, スカラーポテンシャル p およびベクトルポテンシャル w を持つベクトル場と調和ベクトル場 h の3成分に直和分解されることを証明した. すなわち, u は

$$u = h + \text{rot } w + \text{grad } p$$

と一意的に表せる. 調和ベクトル場 h に対する境界条件としては, 法線方向の成分または接平面方向の成分がゼロであるものを採用した. これら2つの境界条件によって領域の位相不変量 (Betti 数) との調和ベクトル場の関連について明らかにした. この分解定理は, コンパクトな Riemann 多様体上の滑らかな微分形式に対しては de Rham-Hodge-小平の定理として知られている. 我々は境界のある有界領域において, 何ら滑かさを仮定しない一般の L^r -ベクトル場に対して同様な分解定理が成立することを示した. 応用として, ベクトル場 u から決まるテンソル場 $\text{grad } u$ の $\text{rot } u$ および $\text{div } u$ の L^r, BMO ノルムによる評価式を任意の微分階数において確立した. Biot-Savard の法則を有界領域において一般化することに成功した. 更に多重連結領域における定常ナビエ・ストークス方程式の非斉次境界値問題の可解性に対して, その領域の位相不変量と与えられた境界値の全流量との関係を明らかにした.

(7) **非斉次境界値条件下における Navier-Stokes 方程式の大域的弱解の存在:**

3次元の有界領域における Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題に対して, 与えられた境界データの大きさに関らず, 強エネルギー不等式を満たす時間大域的な弱解が存在することを証明した. 通常の斉次境界データの場合, このような弱解の運動エネルギーは時間の経過と共にゼロに減衰するが, 本研究で得られた弱解については指数増大の可能性を否定できない. しかし, 対象とする領域が単連結であれば高々時間に関して一次の増大であることが証明される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計16件)

① Farwig, R., Kozono, H., Sohr, H., Global weak solutions of the Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary data and divergence, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 125 (2011), 51—70 査読有 DOI: 10.4171/RSMUP/125-4

② Kozono, H., Sugiyama, Y., Takada, R., Non-existence of finite-time self-similar solutions of the Keller-Segel system in the

scaling invariant class, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010), 60--66. 査読有
DOI:10.1016/j.jmaa.2009.09.063

③ Kozono, H., Yanagisawa, T., Nonhomogeneous boundary value problems for stationary Navier-Stokes equations in a bounded domain with a multiply connected boundary, Pacific Math. J. 243 (2009), 127--150. 査読有
DOI: 10.2140/pjm.2009.243.127

④ Kozono, H., Yanagisawa, T., Leray's problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data, Math. Z. 262 (2009), 27--39. 査読有
DOI:10.1007/s00209-008-0361-2

⑤ Kozono, H., Yanagisawa, T., Global DIV-CURL Lemma in bounded domains in \mathbb{R}^3 , Jour. Funct. Anal. 256 (2009), 3847--3859. 査読有
DOI:10.1016/j.jfa.2009.01.010

⑥ Kozono, H., Sugiyama, Y., Global strong solution to the semi-linear Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with small data in scale invariant spaces, J. Differential Equations 247 (2009), 1--32. 査読有
DOI:10.1016/j.jde.2009.03.027

⑦ Kozono, H., Yanagisawa, T., L^r -variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), 1853-1920. 査読有
DOI:10.1512/iumj.2009.58.3605

⑧ Kozono, H., Sugiyama, Y., Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ and its application to the self-similar solution, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), 1467--1500. 査読有
DOI:10.1512/iumj.2008.57.3316

⑨ Kozono, H., Sugiyama, Y., Local existence and finite time blow-up in the 2-D Keller-Segel system, J. Evol. Equ. 8 (2008), 353--378. 査読有
DOI:10.1007/s00028-008-0375-6

⑩ Kozono, H., Wadade, H., Remarks on Gagliardo-Nirenberg type inequality with critical Sobolev space and BMO, Math. Z.

259 (2008), 935--950.
DOI:10.1007/s00209-007-0258-5

[学会発表] (計 4 4 件)

① 小藪英雄, Global compensated compactness theorem for general differential operators of first order. The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications 2010年 5月 25日~28日, Dresden, Germany.

② 小藪英雄, Leray's inequality in 3D multi-connected domains. Workshop on Mathematical Aspects of Hydrodynamics 2009年 7月 19日~25日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany.

③ 小藪英雄, Leray's inequality in 3D domains. International Conference on Parabolic Equations 2009: 2009年 5月 11日~15日, Banach Center, Bedlewo, Poland.

④ 小藪英雄, 領域の位相不変量と定常ナビエ・ストークス方程式の可解性について. 中央大学 第49回 Encounter with Mathematics 流体基礎方程式 いろいろな視点から見た流体方程式」2009年 2月 27日~28日, 中央大学.

⑤ 小藪英雄, Global Div-Curl Lemma on bounded domains in \mathbb{R}^3 . Vorticity, Rotation and Symmetry-Stabilizing and Destabilizing Fluid Motion C.I.R.M. 2008年 5月 18日~23日, Luminy, France.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/researchfields/kozono.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小藪 英雄 (KOZONO HIDEO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 00195728

(2) 研究分担者

柳田 英二 (YANAGIDA EIJI)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 80174548

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90272020

中村 誠 (NAKAMURA MAKOTO)
山形大学・理学部・教授

研究者番号：70312634
久保 英夫 (KUBO HIDEO)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50283346
金田 行雄 (KANEDA YUKIO)
愛知工業大学・工学部・教授
研究者番号：10107691
石原 卓 (ISHIHARA TAKASHI)
名古屋大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：10262495
芳松 克則 (YOSHIMATSU KATSUNORI)
名古屋大学・大学院工学研究科・助教
研究者番号：70377802
隠居 良行 (KAGEI YOSHIYUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：80243913
栄伸 一郎 (EI SHINICHIRO)
九州大学・マス・フォア・インダストリ・教授
研究者番号：3201362