

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2008～2013

課題番号：20244005

研究課題名(和文)複素多様体上のRicci solitonの幾何

研究課題名(英文)Geometry of Ricci solitons on complex manifolds

研究代表者

満淵 俊樹 (Mabuchi, Toshiki)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80116102

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 29,800,000円、(間接経費) 8,940,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 坂根-小磯のKähler-Einstein計量構成法を、中川泰宏氏と共同で、Ricci solitonが出現する二木障害が消えない場合にまで一般化し、この場合にはEinstein佐々木計量が得られることを示した。(2) 複素射影平面の3点blowing-up上のKähler-Einstein計量を、漸近展開を用いて具体的に詳しく記述した。(3) Donaldson-Tian-Yau予想に関し i) 漸近相対Chow安定の仮定の下にpolybalanced計量の漸近列が存在することを示し、ii) 新田泰文氏と共同で、相対強K-安定性から漸近相対Chow安定性が従うことを示した。

研究成果の概要(英文)：(1) In a joint work (Tohoku Math. J., 65, 2013, 243-252) with Y. Nakagawa, we generalized Sakane-Koiso's construction of Kähler-Einstein metrics to the Kähler-Ricci soliton case where the Futaki invariant is non-vanishing. In this case, we obtain Sasaki-Einstein metrics in place of Kähler-Einstein metrics.

(2) For the Kähler-Einstein metric on the blowing-up of the complex projective plane at 3 non-colinear points, its detailed description was obtained by asymptotic expansion of the solution of a hyperbolic affine sphere equation on a bounded domain in the real 2-plane (AMS/IP Stud. Adv. Math. 48, 219-229).

(3) As to the Donaldson-Tian-Yau Conjecture, we proved: i) Asymptotic relative Chow stability implies the existence of a sequence of polybalanced metrics (Osaka J. Math. 48, 2011, 845-856); ii) strong relative K-stability implies asymptotic relative Chow stability (joint work with Y.Nitta).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素多様体 Ricci soliton K-安定性 Donaldson-Tian-Yau予想 テスト配位 佐々木アインシュタイン計量 偏極射影代数多様体 トーリック微分幾何

1. 研究開始当初の背景

Kähler 幾何における Ricci soliton (Kähler-Ricci soliton とよばれる) とは, Kähler-Ricci flow の極限にしばしば現れる計量で Hamilton によって Kähler-Einstein 計量の一般化として導入された. 例としては, Kähler-Einstein 計量をもつ Fano 多様体上の \mathbb{P}^1 -bundle に構成される小磯ソリトンが知られている. 一方 Fano 多様体をひとつ固定した場合の Ricci soliton の正則自己同型群の作用を法とする一意性は, Tian-Zhu によるものの他に, 別の枠組みからの研究代表者の研究もある.

さて, この Ricci soliton は, 二重の意味で, 最近脚光を浴びている. ひとつは Perelman によるポアンカレ予想の解決で, 彼の用いた方法が現在, 複素幾何に計り知れないインパクトを与えつつあり, Cao, Tian-Chen-Zhu-Sesum, Phong-Song-Sturm-Weinkove らを含め多くの幾何学者が活発な研究を展開している. 実際この方向からの研究は, 近年の複素幾何では最も有望なもののひとつに挙げられている.

別の重要な流れは, toric 幾何と Kähler-Ricci soliton との関係で, 近年 Wang-Zhu が toric Fano 多様体上で Kähler-Ricci soliton の存在を示したことから始まった. 一方, 数理物理学的考察から, 佐々木多様体の組織的研究が Gauntlett-Martelli-Sparks-Yau らによって始まったが, その後二木小野-Wang が Wang-Zhu の方法を用いて toric 佐々木多様体に対し Kähler-Ricci soliton の存在を示した (これは Reeb ベクトル場をうまく取り替えてやると Einstein 佐々木多様体と思うことが出来る). さらに Calabi の結果のある種の一般化として, 二木 (およびその後の後藤の結果) によって, toric Fano 多様体の標準束に Ricci-flat Kähler 計量が入ること知られるようになった. とここで Einstein 佐々木多様体は, Calabi-Yau 多様体と同じく数理物理学的に非常に基本的な対象で, AdS/CFT 対応に関する種々の予想がある.

こうした Ricci soliton に関する研究は, Ricci flow と toric 幾何の二つの方向にかなり乖離している観があったが, これを何らかの意味で統合して, Ricci soliton については toric 幾何から独立した理論を展開するのが望ましいと思われる.

2. 研究の目的

上記の背景から, Kähler-Ricci soliton に関する以下を研究目的のひとつとして設定した.

(1) 二木-小野-Wang が toric 幾何の立場から得た結果を, より広い枠組み, すなわち Kähler-Ricci soliton をもつ一般の Fano 多様体に対する結果として再構成する.

一方, 複素射影平面の 3 点 blowing-up 上に Kähler-Einstein 計量が存在することが Siu らによって知られている. 次も目的のひとつである.

(2) この計量を explicit に記述する.

実は (2) については, 例えば複素射影平面の 3 点 blowing-up にはいる Kähler-Einstein 計量を求め

る方程式が, ある具体的な実 2 次元の有界領域上でディリクレ条件を与えて実モンジュ=アンペール方程式を解くことに帰着される. この方程式の解は, 境界のフビニ=ピック不変量から具体的に求まるのであるが, この方法のさらなる発展と精密化に取り組んだ. 最後に

(3) 複素微分幾何の中では中心的な話題である Donaldson-Tian-Yau 予想

についても Ricci soliton 等の特殊計量に深く関連した問題としてその理解と解決を目指した.

3. 研究の方法

研究チーム (研究代表者, 研究分担者, 連携研究者) を中心として, Ricci flow, Kähler-Ricci soliton, toric 幾何, AdS/CFT 対応等に関する勉強会を繰り返し開き, 知見を深めるとともに問題を煮詰め, 研究目的達成への道筋を確立した.

一方では, 菅平での国際複素幾何シンポジウムや PRCGC (環太平洋複素幾何シンポジウム) を年に一度開催することによって, 国際的な発表や情報交換の場を設けるとともにレビューを受けた.

4. 研究成果

研究目的の項目 (1) に関連して, 研究分担者の中川泰宏氏 (佐賀大) と共同で, 「Kähler-Einstein Fano 多様体上の \mathbb{P}^1 -bundle における坂根-小磯による Kähler-Einstein 計量の構成法」を, 二木障害が消えない場合, すなわち Kähler-Ricci soliton が出現する場合においても 「Einstein 佐々木計量が得られる」という形で一般化した. この結果は, 下記雑誌論文の [1] として出版された.

次に, 研究目的の項目 (2) については, 対応する有界領域の hyperbolic affine sphere の方程式の類似物を通して, 境界に沿う漸近展開をかなり精密に具体的に求めることが出来た. この結果は下記の図書の [1] として出版された.

最後に, 研究目的の項目 (3) についての諸結果を述べよう. まず下記雑誌論文の [4] を得た. これは, 偏極射影代数多様体において, 漸近相対 Chow 安定性の仮定の下に, polybalanced 計量の漸近列の存在を示したもので, Donaldson-Tian-Yau 予想の extremal Kähler 版を考える上でかなり有用であると思われる. さらに Donaldson-二木不変量をテスト配位のモジュライ空間のコンパクト化上の関数にまで拡張した:

T.Mabuchi: The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations, arXiv:1307.1957.

この論文は Birkhäuser から今年出版される小林追悼記念号に掲載される予定である. さらに, 新田泰文氏 (東工大) との共同研究

T.Mabuchi and T.Nitta: Strong K-stability and asymptotic Chow-stability, arXiv:1307.1959

において偏極射影代数多様体の相対強 K-安定性から漸近相対 Chow 安定性が従うことを示したが、これは現在査読中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 8 件)

[1] T.Mabuchi and Y.Nakagawa: New examples of Sasaki-Einstein manifolds, doi: 10.2748/tmj/1372182724, Tohoku Math. J. 65 (2013), 243-252, 査読有。

[2] R.Goto: Calabi-Yau structures and Einstein-Sasakian structures on crepant resolutions of isolated singularities, doi: 10.2969/jmsj/06431005, J. Math. Soc. Japan 64 (2012), 1005-10052, 査読有。

[3] T.Hoffmann, W.Rossmann, T.Sasaki and M.Yoshida: Discrete flat surfaces and linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space, doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05698-4, Trans. AMS 364 (2012), 5605-5644, 査読有。

[4] T.Mabuchi: Asymptotics of polybalanced balanced metrics under relative stability constraints, Osaka J. Math. 48 (2011), 845-856, URL: <http://projecteuclid.ojm/1317044950>, 査読有。

[5] M.Kokubu and M.Umehara: Orientability of linear Weingarten surfaces, spacelike CMC-1 surfaces and maximal surfaces, doi: 10.1002/mana.200910176, Math. Nachr. 284 (2011), 1903-1918, 査読有。

[6] Y.Nakagawa: On generalized Kähler-Ricci solitons, Osaka J. Math. 48 (2011), 497-513, URL: <http://projecteuclid.ojm/1315318350>, 査読有。

[7] K.Hasegawa: Small deformations and non-left-invariant complex structures on six-dimensional compact solvmanifolds, doi: 10.1016/j.difgeo.2009.10.003, Diff. Geom. Appl. 28 (2010), 220-227, 査読有。

[8] T.Mabuchi: An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds II, Osaka J. Math. 46 (2009), 115-139, URL: <http://projecteuclid.ojm/1235574041>, 査読有。

{ 学会発表 } (計 16 件)

[1] T.Mabuchi: Donaldson-Tian-Yau's conjecture for general polarization, 2013 年 7 月 12 日,

Ricci curvature: limit spaces and Kähler geometry, ICMS, Edinburgh, Scotland, UK.

[2] T.Mabuchi: The Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, 2013 年 7 月 1 日, The Asian Mathematical Conference 2013, BEXCO, 釜山, 韓国.

[3] T.Mabuchi: A new version of the Donaldson-Tian-Yau conjecture for extremal metrics, 2013 年 5 月 28 日, Workshop "Extremal Kähler metrics," CRM, Montreal, Canada.

[4] 満淵俊樹: 多様体の小林-ヒッチン対応に関する最近の進展について, 2013 年 3 月 21 日, 日本数学会年会, 京都大学吉田キャンパス。

[5] T.Mabuchi: A version of Donaldson-Tian-Yau's conjecture for general polarization, 2012 年 12 月 13 日, Recent Developments in Kähler Geometry, IHP, Paris, France.

[6] T.Mabuchi: Strong K-stability in Donaldson-Tian-Yau's conjecture, 2012 年 9 月 8 日, 日中友好幾何学研究集会, 成都, 中国.

[7] T.Mabuchi: An energy-theoretic approach to Donaldson-Tian-Yau's conjecture, 2012 年 7 月 22 日, 多変数函数論葉山シンポジウム, 湘南国際村。

[8] T.Mabuchi: Moduli space of test configurations, 2011 年 7 月 6 日, Differentialgeometrie im grossen, Oberwolfach, Germany.

[9] T.Mabuchi: On the existence problem of extremal Kähler metrics, 2011 年 3 月 24 日, Workshop on extremal Kähler metrics, Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, USA.

[10] T.Mabuchi: Donaldson-Tian-Yau's conjecture, 2010 年 10 月 23 日, International Symposium on Complex Geometry, 菅平プチホテルゾンタック.

[11] T.Mabuchi: Donaldson-Tian-Yau's conjecture and its extremal Kähler version, 2010 年 8 月 12 日, Geometric Topology and Riemannian Geometry, Bangalore, India.

[12] T.Mabuchi: An extremal Kähler version of Donaldson-Tian-Yau's conjecture, 2010 年 7 月 30 日, PRIMA Conference on Geometric Analysis, Vancouver, Canada.

[13] T.Mabuchi: K-stability and asymptotic Chow stability, 2009 年 11 月 10 日, Invariants in Algebraic Geometry, 宮岡遷暦記念, 東京大学。

[14] T.Mabuchi: Extremal metrics, K-stability

and asymptotic Chow stability, 2009年8月3日,
環太平洋複素幾何シンポジウム, 成都, 中国 .

[15] T.Mabuchi: Stability and extremal metrics
for projective bundles, 2009年7月7日, PRIMA
Congress, Sydney, Australia.

[16]T.Mabuchi: Uniqueness problem for Sasaki-
Einstein metric (survey talk), 2009年6月18日,
IndAM workshop on Kähler and Sasakian
Geometry, Rome, Italy.

〔図書〕(計1件)

[1] T.Mabuchi: An affine sphere equation
associated to Einstein toric surfaces, 4th ICCM,
219-229, AMS/IP Stud. Adv. Math. 48, AMS,
Providence, RI, 2010.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

満淵 俊樹 (MABUCHI, Toshiki)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80116102

(2)研究分担者

後藤 竜司 (GOTO, Ryushi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30252571

梅原 雅顕 (UMEHARA, Masaaki)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・
教授
研究者番号：90193945

佐々木 武 (Sasaki, Takeshi)
神戸大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：00022682

中川 泰宏 (NAKAGAWA, Yasuhiro)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：90250662

長谷川 敬三 (HASEGAWA, Keizo)
新潟大学・人文社会教育科学系・教授
研究者番号：00208480

(3)連携研究者

中島 啓 (NAKAJIMA, Hiraku)
京都大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：00201666