

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2008～2012

課題番号：20244008

研究課題名（和文）群の表現およびルート系に付随した微分方程式に関する研究とその応用
 研究課題名（英文）Study of group representation and differential equations associated with root systems and its applications

研究代表者

大島 利雄（OSHIMA TOSHIO）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50011721

研究成果の概要（和文）：フックス型線形常微分方程式の接続問題，解の表示などを一般的に解析する理論を構築して新たな具体的結果を得た．さらに不確定特異点を含む場合への拡張を与えた．また，ポアソン変換などの積分変換へ微分方程式の結果を応用した．

研究成果の概要（英文）：We established a general theory which analyzes the connection problem, the expression of solutions etc. of Fuchsian linear ordinary differential equations and got many new explicit results. We also gave a similar study for the equations which may have irregular singularities. Moreover we applied some results to problems in an integral geometry including Poisson transformations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	6,800,000	2,040,000	8,840,000
2009年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2010年度	6,000,000	1,800,000	7,800,000
2011年度	6,400,000	1,920,000	8,320,000
2012年度	6,000,000	1,800,000	7,800,000
総計	31,000,000	9,300,000	40,300,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：代数解析，表現論，常微分方程式，Kac-Moody ルート系

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究代表者が行ってきた半単純対称空間上の調和解析において，群作用で不変な微分方程式系の理論は極めて有効であった．この微分方程式を拡張した Heckman-Opdam の超幾何系の方程式や Gelfand の超幾何，完全積分可能量子系の解析などの研究が世界的に進展していた．

(2) 線形の Fuchs 型常微分方程式について，Katz の middle convolution の理論を契機として，リジッドな 1 階方程式系の構造が明らかになり，その場合の解の積分表示やより一

般の場合の分類，あるいはモノドロミー不変変形を通じてパンルベ方程式との関連が明らかになりつつあった．

(3) 研究代表者によるスカラー型一般化 Verma 加群の研究により，その零化イデアルの生成元が具体的に構成され，様々な等質空間上で微分方程式を用いた解析が可能になった．

2. 研究の目的

(1) Heckman-Opdam 系などの多変数超幾何の 1 次元特異直線への制限は，リジッドなフッ

クス型高階線形常微分方程式が現れることが研究代表者らの研究で分かっていた。大域的な問題を解くため、リジッドなフックス型線形常微分方程式の接続問題を解くことを主な目的として一般的な高階線形常微分の解析を行い、その構造を明らかにする。

(2) フックス型とは限らない線形常微分方程式を扱うため、不確定特異点での解析や合流操作を解析するとともに、不確定特異点の分類を行う。

(3) 一般 Verma 加群の零化イデアルの生成元を用いて、積分幾何における種々の積分変換の像の特徴付けや表現論との関連を明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 東京大学において、表現論セミナーと古典解析セミナーを定期的で開催し、関連分野の研究者を招いて最新の結果の講演や議論を行って研究の方向を探った。さらに国内外の研究集会に参加する、年に何度かワークショップを主催して、海外からの招聘研究者も含めての国際的なレベルの研究交流を行う、などを通じて研究を進展させた。

(2) コンピュータを使った数式処理による微分作用素の計算プログラムを開発し、多くの複雑な計算をコンピュータで行うことにより、理論を構築していった。

4. 研究成果

(1) 1 階のフックス型常微分方程式系に対する Katz の middle convolution と横山の拡大などの操作が同等であることを示した。

従来あった 2 種類の別のアプローチの関係が問題となっていたが、それらが本質的に同じであることが分かり、両者が統一されることとなった。また、固有値が重ならないなどの条件があった横山の操作を一般化してその制限を取り払った。

(2) Heckman-Opdam の超幾何微分方程式について、その合流で得られる方程式の決定と不確定特異点を含む無限遠でよい振る舞いをする解の一意性、1 次元線形特異集合への制限とそれを用いた接続公式の証明、別の実型での接続公式などの結果を、連携研究者の示野との共同研究で得た。

(3) 多項式係数の単独高階線形常微分方程式に対して、middle convolution にあたる概念を拡張し、一般リーマンスキームを定義した。これを元に、フックス型の場合に、方程式の構成、合流操作、隣接関係式、接続公式、モノドロミーの既約性、多項式解の構造、解の

積分表示やべき級数表示に対し、一般的かつ具体的結果を得て、スペクトル型による方程式の分類と universal model の存在定理を示した。特にリジッドなモノドロミー群が、みかけの特異点を持たない単独高階線形微分方程式の解空間に実現できることを示され、Katz が提出していた未解決問題を解決した。

局所モノドロミー行列の固有値に重複度があるが半単純な場合に、部分ロンスキー行列を用いた接続係数の拡張を定義し、いくつかの場合にガンマ関数による明示公式を与え、一般の場合の予想を与えた。

解空間のモノドロミー群が可約になる場合の解析を主目的として、隣接関係式を用いて重要な多項式を定義し、いくつかの場合にそれを計算した。

またフックス型単独高階線形常微分方程式の全体に、ある Kac-Moody ルート系のワイル群が作用していることを示し、その軌道を分類して性質を明らかにした。

① フックス型方程式の分類では、アクセサリー・パラメータの個数を決めると、変換では移り得ない有限個の型に帰着されることを示し、個数が少ない場合の分類表を与えた。これはパンルベ型方程式の研究に多大な影響を与え、東大の坂井や近畿大の鈴木の高階パンルベ方程式の構成へとつながった。

② リジッドな方程式の場合の接続公式はガンマ関数を使って具体的に与えることができた。これにより Heckman-Opdam の多変数超幾何関数の接続公式の自然な証明を与えた。

③ アクセサリー・パラメータの個数を与えたときの方程式型の分類結果や種々の積分変換による方程式型の変換を得るコンピュータのプログラムを作成して公開した。

また、微分作用素が関わる計算や単独フックス型方程式の既約性、接続公式、解の積分表示などを計算して見やすく表示する数式処理のプログラムを作成して公開した。

<http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/>

いくつかのリジッドな常微分方程式について知られていた解の接続公式や積分表示などの公式集は必要なくなり、一般の場合にも簡単なアルゴリズムで結果が得られることとなった。

④ 主要結果の分かりやすい解説はレクチャーノートとして公開し、より詳しい成果の内容は、完全な証明をつけて日本数学会のメモアールの形で出版した。

(4) フックス型とは限らないリーマン球面上の代数的線形常微分方程式の一般論を構築

するため、不確定特異点の研究を行った。福原の漸近展開やストークス現象の記述、フックス関係式などの古典的理論の再構築を行った。さらに、分岐を持たない不確定特異点について、一般リーマンスキームを定義し、フックス型の場合の変換を拡張した変換による分類を行った。関連して、一般の対称 Kac-Moody ルート系のルートのワイル群軌道の分類を行い、軌道の有限性定理を示した。

(5) リーマン対称空間の種々の境界からのポアソン変換の像を微分方程式で特徴づける問題は、40年以上にわたって世界中で研究が続けられてきたが、連携研究者の示野との共同研究により、一般 Verma 加群の零化イデアルを具体的に求める方法によって、対称空間の線形束の場合も含めて解決された。

(6) 「線形代数の量子化」というアイデアで半単純リー環の両側イデアルの具体的構成を得ていたが、これがポアソン変換のみならず、ラドン変換、Whittaker モデル、多変数超幾何関数、ペンローズ変換などの種々の積分幾何の問題を規定する微分方程式系を普遍的に記述していることを明らかにした。

また、グラスマンとは限らない一般旗多様体上におけるラドン変換を定義し、さらに有限体や有限集合上のラドン変換と深く関連していることを明らかにした。

(7) ガウスの超幾何関数についての基本的公式やモノドロミーの既約条件について積分等を用いない初等的証明を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Toshio Oshima, An elementary approach to the Gauss hypergeometric function, 査読有, Josai Mathematical Monograph 6, 2013 年, 3-23.
- ② Kazuki Hiroe and Toshio Oshima, A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application, 査読有, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 40, 2012 年, 195-241.
- ③ Toshio Oshima and Nobukazu Shimeno, Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations, 査読有, RIMS Kokyuroku Bessatsu B20, 2010 年, 129-162.

[学会発表] (計 52 件)

- ① 大島利雄, Riemann 球面上の代数的線型常微分方程式, 東京理科大, 日本数学会年会, 特別講演, 2012 年 3 月 28 日.
- ② Toshio Oshima, Ordinary differential equations and Kac-Moody root systems, Conference - Lie groups: structure, actions and representations, Bochum, ドイツ, 2012 年 1 月 12 日.
- ③ Toshio Oshima, Generalizations of Radon transforms on compact homogeneous spaces, Tufts University, Geometric Analysis on Euclidean and Homogeneous Spaces, Tufts University, アメリカ, 2012 年 1 月 8 日.

[図書] (計 2 件)

- ① Toshio Oshima, 日本数学会, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs 28, 2012 年, 203 ページ.

- ② 大島利雄, 東京大学数理科学研究科, 特殊関数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学レクチャーノート 11, 2011 年, 111 ページ.

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/lecturenote.html>

[その他]

ホームページ等

<http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大島 利雄 (OSHIMA TOSHIO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 5001271

(2) 研究分担者

小林 俊行 (KOBAYASHI TOSHIYUKI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 8201490

(3) 連携研究者

織田 孝幸 (ODA TAKAYUKI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 10109415

松本 久義 (MATUMOTO HISAYOSI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 50272597

寺田 至 (TERADA ITARU)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：70180081

関口 英子 (SEKIGUCHI HIDEKO)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50281134

関口 次郎 (SEKIGUCHI JIRO)
東京農工大学・大学院共生科学技術研究・
教授
研究者番号：30117717

落合 啓之 (OCHIAI HIROYUKI)
九州大学・マスフォアインダストリ研究
所・教授
研究者番号：90214163

示野 信一 (SHIMENO NOBUKAZU)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：60254140