

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2008～2012

課題番号：20244009

研究課題名(和文) 非線形発展方程式の臨界漸近構造の研究

研究課題名(英文) Research for Critical Asymptotic Structure of Nonlinear Evolution Equations

研究代表者

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20224107

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：drift-diffusion system、臨界指数、漸近展開、最大正則性、entropy 汎関数

1. 研究計画の概要

臨界型楕円型放物型連立系は、比較的単純な偏微分方程式系ではあるが、半導体素子設計(ミクロスケール)、走化性粘菌モデル(ミデアムスケール)、重力下の星間ガスと相互作用粒子系(マクロスケール)など、異なる物理スケールわたる普遍的な構造を記述する。その解の解析的構造はスケール不変臨界性という観点から興味深い。すでに半導体素子設計の方程式として、基本的な解の存在定理、および有限時間内での不安定性の発生のメカニズムについて、考察を加え、系を支配する方程式として質量保存則と電場に対する Poisson 方程式、さらに電流移動に関する、消散型運動量保存則(Navier-Stokes 方程式)からの緩和時間零極限として得られる点に着目する。この際、圧力項に対して Einstein 則を適用すると drift-diffusion 方程式をまた、等温条件を課すと、退化 drift-diffusion 方程式あるいは退化走化性方程式を得る。従ってこれらの方程式系には、その構成から、自然にいくつかの保存則(質量保存、運動量保存、エントロピー非拡大)が従う。これらの保存量と準保存量を組織的に導出するために、物理的に意味のある圧縮性粘性流体方程式(圧縮性 Navier-Stokes 方程式)と非線形 Schrödinger 方程式から形式的にこれら非局所型退化・非退化放物型偏微分方程式が導出できるかどうかを考えそれぞれのモデルに固有の数理的現象を引き出すことを目標とし、ことに物理的に意味のある指数に対する臨界性と臨界時に発生する漸近構造の様々な特徴を取り出すことを考えた。

2. 研究の進捗状況

(1) 小林孝行と共同研究を行い、近似された圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱解から緩和時間零極限として弱い解の範囲で退化非局所放物型偏微分方程式が数学的に厳密に導出し、同時に大域的弱解の存在と付随する entropy 汎関数が厳密に成り立つことを示した。

(2) 一方、半導体のモデル方程式はその微細化に伴い、量子効果が無視できなくなる。その際、量子効果を伴った移流拡散方程式は、Schrödinger 方程式を元に形式的に導出される。ここではある消散型非線形 Schrödinger 方程式を考え、その緩和時間零への極限として量子移流拡散方程式が導出されることを見た。

(3) 元々の2次元 drift-diffusion 方程式は、絶対可積分空間が臨界空間となるが、そこでは先見評価の欠如により大きな解の大域存在性を保証できない。大意解の保証のためには entropy 汎関数を導入することが不可欠となるが、そのためにそれらを数学的に厳密に正当化できる scale 不変な関数空間を設定し解の存在を議論する必要がある。ことに2次元の問題の場合、平均0の仮定なしにはこうした汎関数の正当化は不可能であることが知られていた。そこで符号を変える解に対して清水扇丈氏とともに drift-diffusion 方程式を2次元 Hardy 空間で解いたがそれに伴い、熱方程式の解の非斉次項による解のいわゆる最大正則性評価を端点指数で示す必要があった。このため斉次 Besov 空間 $B^0_{\{1,2\}}$ において熱方程式の最大正則性を確立し、それを用いて符号を変える drift-diffusion 方程式の可解性を清水扇丈氏とともに示した。

(4) 一方、分子レベルでの drift-diffusion 方程式の中には拡散過程としてブラウン運動に近いものよりも、むしろラプラシアン分数べきに近い拡散によって運動が支配される構造が考えられる。山本征法と共同で、ラプラシアン分数べきの拡散に支配される drift-diffusion 方程式を考え、その解の適切性、時間大域存在性、解の減衰について [1] やそれに続く論文に従って考察した。さらに時間無限遠において、解の2次までの漸近展開を行った。この際ラプラシアンの指数が1、次元が3のときに、2次展開における係数が見かけ上発散する、いわゆる臨界状況を呈するが、平均が零であるような熱核による補正項を考えることにより、こうした臨界状況における2次漸近展開の困難を回避した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

以上のように移流拡散型非線形偏微分方程式系の臨界指数についていわゆる藤田型の指数とソボレフ型の臨界指数について同定することを終え、次にこれらの特別な指数の漸近展開の構造を解明することに移行している。現在は退化放物型問題の藤田指数に関して対象となる臨界非線形楕円型方程式の解の総質量を与えたときの解の一意存在の問題に取り組んでいるところで、球対称という仮定のもとで3次元の場合だけほぼ証明を得ている。今後はこの問題のより一般の次元への拡張を試みる。そのためにはこの場合のパラメーターに依存する漸近構造を明らかにすることが重要であろう。ついでほぼ解明されたソボレフ型臨界指数について漸近形の同定をおこなうことがもっとも重要な問題である。そのためには臨界型の半線形楕円型偏微分方程式の構造と共に、漸近収束のための手法をさらに探索する必要がある。この場合もっとも困難なのは、解の正則性を得ることである。この部分の解明が進むことが臨界状態の解析に不可欠であって、この部分の研究を進めつつあるところである。

4. 今後の研究の推進方策

それぞれ上記に上げた成果などから当初に考えた臨界性における高次漸近構造の解明に向けて特に drift-diffusion 方程式系の新しい臨界構造を見いだした点は重要であり、この特別な指数がモデルにおいてどういう位置を占めるかを今後検証する。そのためにまず退化移流拡散方程式系についての漸近定常解の総質量を与えて一意的に求める問題にあたり、総質量を与えるごとに球対称な非線形楕円型方程式の解が一意的に得られることを当面の目標とする。これが証明されれば、臨界型退化 drift-diffusion 方程式の解の時間大域的漸近形が同定され、臨界時の解の形状が明らかになる。これを示すことが解の漸近減衰次数の対数函数的縮退を明らかにする最短の方法である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

1. T. Ogawa, The degenerate drift-diffusion system with the Sobolev critical exponent, Disc. Conti. Dynam. System Ser S., vol. 4, no. 4, (4) (2011), 875-886. 査読あり
2. T. Ogawa, H. Takeda, Global existence of solutions for a system of nonlinear damped wave equations, Differential Intergal Equations, 23, no. 7-8 (2010), 635-657. 査読あり
3. T. Ogawa, S. Shimizu, End-point maximal

regularity and wellposedness of the two dimensional Keller-Segel system in a critical Besov space, Math. Z., 264 (2010), 601-628. 査読あり

4. T. Ogawa, S. Shimizu, The drift-diffusion system in the two dimensional critical Hardy space, J. Functional Anal. 255 (2008), 1107-1138. 査読あり
5. M. Misawa, T. Ogawa, Regularity condition by mean oscillation to a weak solution of the harmonic heat flow into sphere, Cal. Val. in P.D.E. 33 no. 4 (2008), 391-415. 査読あり

[学会発表] (計 35 件)

1. 小川卓克, 日本数学会 函数方程式論分科会 解析学賞受賞 特別講演 「一般化された最大正則性評価とその応用について」、2010年9月24日、名古屋大学、名古屋、日本。
2. 小川卓克, Fourth Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Analysis, Computation and Applications, 「Drift-diffusion system in critical cases」2010年6月11~13日、台北大学、台湾。
3. 小川卓克, Japan-German PDE seminar 「Drift-diffusion system in critical case」2009年9月7~11日、Helmholz center, ミュンヘン, ドイツ。
4. 小川卓克, The third workshop on Nonlinear Partial Differential Equations: Analysis, Computation and Applications. 「Drift-diffusion system in 2 dimensional critical space」2008年12月28日~30日、西安, 中国。
5. 小川卓克, The third Euro-Japanese work shop on Blow-up 「Drift-diffusion system in 2 dimensional critical space」2008年9月8~12日、東北大学、仙台、日本。

[図書] (計 2 件)

1. 小川卓克, 齊藤 毅, 中島 啓, 数学書房、「日本の現代数学」、2010、pp 241
2. T. Ogawa, T. Nakaki, T. Senba, M. Kawashita, M. Kurokiba eds, Proceedings of International Conference of "Mathematical Analysis for Self-organization and Self-similarity" RIMS Kokyuroku Bessatsu vol. 15, pp204. 2009.

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
名称:
○取得状況 (計 0 件)
[その他]