

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 1日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20330181

研究課題名（和文）3次元動的幾何ソフトによる空間図形の探究的な学習用Webサイトの構築と活用

研究課題名（英文）Developing Websites of Explorative Learning for Space Geometry with Three Dimensional Dynamic Geometry Software

研究代表者

岩永 恭雄（IWANAGA YASUO）

信州大学・教育学部・教授

研究者番号：80015825

研究成果の概要（和文）：本研究は、数学教育において空間図形に関する我が国の子どもの学習状況を改善するために、空間図形の探究的な学習用 Web サイトを、3次元動的幾何ソフトなどを用いて構築した。このサイトは、「授業レシピ」（探究的な学習コースに基づく授業デザイン）と「Enjoy Mathematics in 3D」（デザインに基づく学習指導用コンテンツ群）で構成されている。

研究成果の概要（英文）：This study developed the website of explorative learning for spatial geometry with three dimensional geometry software in order to improve the learning of spatial geometry in mathematics education. This site consists of the following two parts; “Lesson Recipe” (Lesson designs based on the courses of explorative learning), “Enjoy Mathematics in 3D” (Groups of digital contents for guidance based on the lesson designs).

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2009年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2010年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2011年度	2,600,000	780,000	3,380,000
年度			
総計	14,100,000	4,230,000	18,330,000

研究分野：数学教育

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：3次元動的幾何ソフト，空間図形，探究的な学習，Web サイト

1. 研究開始当初の背景

研究開始の2008年当初、数学教育において空間図形に関する我が国の子どもの学習状況は極めて悪く、空間図形の学習状況は数学教育の他領域の学習に強い影響を与えることから、空間図形の授業及び学習の質的向上の必要性が指摘されていた。また、3次元動的幾何ソフトなどに関する国際的な研究動向が、従来の空間図形の教材開発からカリキュラム開発・評価に向かっていた。

一方、研究開始以前、3次元動的幾何ソフトなどを用いた空間図形のカリキュラムとデジタルコンテンツが開発済みであった。これらの研究成果をいかし探究的な学習用 Web サイトの構築と、授業及び家庭学習における構築されたサイトの活用によって学習状況を改善する可能性が期待された。また、国際的な研究動向として、探究的な学習用 Web サイトの構築は3次元動的幾何ソフトなどの利用に関する研究動向を、従来の教材開発からカリキュラム開発・評価へ

という動向に留まることなく、学習及びその指導の改善へと転換するものであり、国際的な研究を先導することも期待された。

2. 研究の目的

本研究の目的は、空間図形の探究的な学習のための Web サイトを、3次元動的幾何ソフトなどを用いて構築することである。

3. 研究の方法

前述の目的を達成するために、本研究では次の諸点に取り組んだ。

- 空間図形の探究的な学習の教材開発
- 探求的な学習用の教材コンテンツの開発
- 教材コンテンツによる学習実態の把握
- 探究的な学習コースの考案
- 探究的な学習コースに基づく授業例の開発
- 探究的な学習コースに基づく授業用コンテンツの開発
- Web サイトによるコンテンツ等の公開

4. 研究成果

(1) 探究的な学習コースの考案

3次元動的幾何ソフトなどによる空間図形の探究的な学習を実現するために、小学校／中学校／高等学校向けの探究的な学習コース（小学校用：3コース，中学校用：17コース，高等学校用：7コース，計27コース）を考案した。各コースは、学習指導要領の該当する学校種別・学年，内容に位置づけられるとともに、必要に応じ発展的な学習を含むことによって学校段階を横断したものとなっている。

①探究的な学習コース（小学校用）一覧

1. 作業的な活動を通して線対称の意味を知る。
2. 正多面体を面対称性をもつ2つの立体に切断する。
3. 立方体から正四面体や正八面体を構成する。

②探究的な学習コース（中学校用）一覧

1. 球が円錐に内接するしくみを理解する。
2. ねじれの位置にある2直線の位置関係を理解する。
3. 3点による平面の決定条件を認識する。
4. ある平面に平行な平面をつくらう。
5. 平行投影図のしくみを理解する。
6. 投影図と見取図により空間図形の理解を深める。
7. 回転の軸を含む平面上にない図形を回転させる。
8. 立方体の切断で対称な五角形ができる場合を理解する。
9. 中点連結定理のよさがわかる。
10. 立方体の切断により三角形や四角形の包摂関係を理解する。

11. 同じ操作を繰り返してできる図形の特徴を調べよう。

12. 作業的な活動を通して線対称の意味を知る。

13. 空間において中点連結定理を活用する。

14. 相似比と面積比・体積比の関係を探求する。

15. 斜円錐や斜円錐台の体積を求める。

16. 三平方の定理の利用 円外からひいた接線の長さは等しいことを理解する。

17. ビー玉が転がる力で円錐が動く玩具を設計する。

③探究的な学習コース（高等学校用）一覧

1. 立方体の切断により正四面体をつくる。
2. 円柱・円錐・球の体積の関係を理解する。
3. 球が円錐に内接するしくみを理解する。
4. 円錐に内接する球に接する平面の最大値を求める。
5. 立方体や正四面体の面の色の塗り分け方を調べる。
6. 円錐曲面と円錐曲線の方程式を求める。
7. 直線や平面の方程式の変化を操作・観察する。

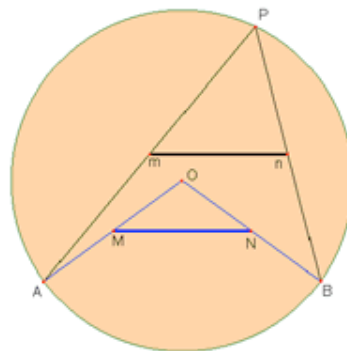
(2) 探究的な学習コースに基づく授業例の開発

3次元動的幾何ソフトなどによる空間図形の探究的な学習を実現するために考案された各コースを、「授業のレシピ」として Web サイトを構築した。各コースは小学校／中学校・高等学校別一覧表で学習指導要領の学習内容に対応付けられている。また、各コースの「授業のレシピ」では、3次元動的幾何ソフトなどの活用メリットとともに、活用シーンが具体的に提案されている。この提案では、授業の概要が紹介されているとともに、レシピの pdf ファイル、3次元動的幾何ソフトの授業用ファイル、授業用の Word ファイルが提供されている。

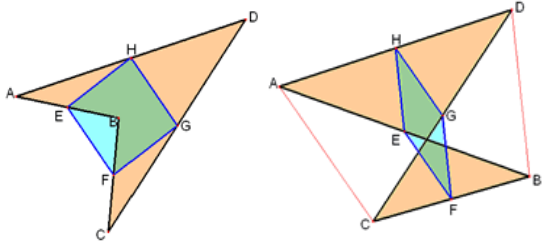
(<http://www.schoolmath.jp/3d/teacher/recipe/index.htm>)

例えば、中学校用の探究的な学習コース「空間において中点連結定理を活用する。」の授業レシピでは次のような展開が紹介されている。

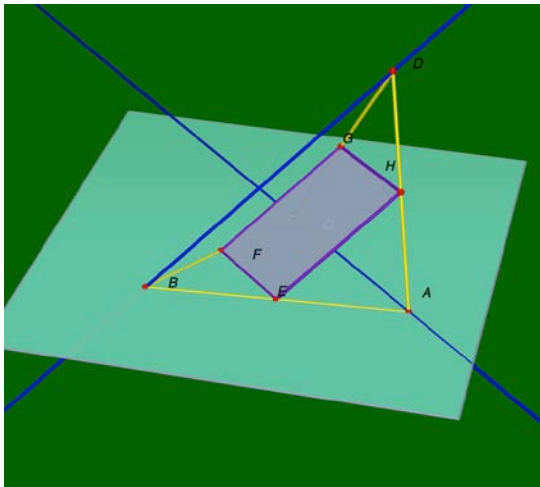
はじめに、生徒は次の場面において中点連結定理を証明し、「 $mn=MN$ 」を明らかにし、2次元動的幾何ソフトで確かめる。



次に、四角形の各辺の中点を順に結んでできる図形がひし形になる場合について2次元動的幾何ソフトで中点連結定理に基づいて考察を深め、ひし形になるための条件を探っていく。



その上で、同じ条件を満たす4点であれば、同一平面上になくとも同様にひし形ができることについて、四角形の場合と同様に中点連結定理に基づいて探究し、3次元動的幾何ソフトを用いて検証する。



(3) 探究的な学習コースに基づく授業用コンテンツの開発

考案された探究的な学習コースを学習活動として具体化するためには教師による学習指導が欠かせない。そこで、考案された学習コースのなかから基盤的な内容にかかわるものを選ぶとともに、小学校・中学校・高等学校では学習されないが空間図形として重要な内容についても視野に入れ、授業において教師が使うためのコンテンツを開発した。開発されたコンテンツのテーマ数は次の通りである：中学校用10タイトル、高等学校用4タイトル、その他2タイトル。

◎中学校用

- 線分の集合による側面の構成
- 平面の回転による立体の構成
- 面の平行移動による柱体の構成
- 平面図形の平行移動
- 回転してできる立体の不思議
- 平面の決定条件
- 「平面と平面が垂直である」とは、どうやって決めたらよい？
- 立方体の切断
- 球の体積を求めよう
- 空間図形から関数ができる?! 円錐の切断面から反比例のグラフへ

◎高等学校用

- 空間ベクトル（射影）
- ベクトルの方程式：内積の活用
- 円錐面の方程式
- 円錐曲線が2次曲線であることを証明しよう

◎その他

- ハム・サンドイッチの定理
- 非ユークリッド幾何学入門 双曲幾何のモデル

各テーマのコンテンツは授業を担当する教師向けとして次のもので基本的に構成されている。

- 教師用パワーポイント及び pdf 版
このコンテンツは授業において教師が提示するためのものである。教師がパワーポイントのスライドにしたがって授業を進めていくことができるようになっている。スライドの一部には、3次元動的幾何ソフトによる動画などが埋め込まれており、生徒や教師が空間図形を実際に動かしながら学習及びその指導に取り組むことができるようになっている。また、各スライドのメモには、そのスライドを使用するにあたっての留意事項が記載されている。（なお、一部については、制作されたパワーポイントとほぼ同等に動作する pdf ファイルを作成し、特定のソフトがない学習環境においてもコンテンツが授業で活用可能になるように工夫されている。）
 - 3次元動的幾何ソフトなどのファイル
このコンテンツは、3次元動的幾何ソフトなどを用いて授業で教師や生徒が空間図形を操作するためのものである。教師用パワーポイント及び pdf 版に、静止画、動画などとして埋め込まれている。
 - 3次元動的幾何ソフトなどのファイルの操作方法を示した動画
このコンテンツは、3次元動的幾何ソフトなどのファイルをコンピュータでいかに操作すべきかを示した動画である。動画はパワーポイントのファイルやその pdf 版に組み込まれており、該当するスライドからリンクが張られている。
 - コンテンツ使用に関する解説
このコンテンツには、授業において各タイトルのねらい、該当学年及び時期が記載されている。
授業コンテンツの例は以下の通りである。
- ①平面図形の平行移動
- ねらい
このコンテンツでは、平面図形の平行移動によって空間図形が構成されるという見方に生徒が出会い、動的幾何環境下で長方形や三角形などを平行移動することによってできる空間図形の特徴を調べることが意図されている。
 - 該当学年及び時期
主として中学校第1学年・平面による空間図

形の構成

■ 概要

【三角形を平行に動かすと、どんな形ができるかな】

- 黄色の点をドラッグして、三角形を平面に垂直な方向に平行移動してみましょう。
- 青色の点をドラッグして、三角形の形をかえてみましょう。
- 動いた跡をみたいときには、右の画面を使いましょう。

三角形と垂直な直線をひきます。

辺と辺はどんな関係でしょうか。辺と面はどんな関係でしょうか。面と面はどんな関係でしょうか。

このコンテンツは、透明な壁で作られたエレベータの動きなど、ある面を同じ方向に一定の距離だけ平行に動かしたとみなせる事象からはじまりまる。具体的な事象と結びつけながら、面を平行移動することによって構成される立体についての学びへと導く。その後、長方形、三角形、四角形へと平行移動する面の形をかえながら、平行移動によって構成される立体の特徴を調べ、辺と辺、面と面、辺と面の関係などをまとめる。さらに、円を平行移動することによって構成される立体や、発展的な内容として、元の面に垂直な方向に平行移動するばかりでなく、任意の方向に平行移動することによってどんな立体ができるかについても学べるようになっていく。

②平面と平面が垂直であることの決定

■ ねらい

このコンテンツでは、生徒が既にもっている直観的なイメージを基にして、「2つの平面が垂直である」ことの定義を自ら見出していくことが意図されている。

■ 該当学年及び時期

中学校第一学年・空間における直線や平面の位置関係

■ 概要

二平面が垂直であることの定義について、複数の教科書を比較すると、教科書会社によって定義が異なることがわかる。このコンテンツでは、以下の定義によっていく。

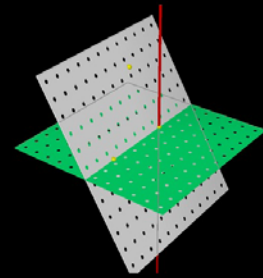
平面 P と平面 Q が交わり、平面 Q が平面 P に垂直な直線 l を含んでいるとき、二つの平面 P, Q は垂直であるという。

次のスライドにおいて、黄色の点をドラッグすることにより、灰色の平面を動かすことができる。その動作の中で、どのような場合に二つの平面が垂直に見えるのかについて、生徒が考える機会を設定する。そして、赤色の直線と灰色の平面の関係を考えることにより、生徒が自ら上述の定義を見出すことが意図されている。

平面と平面が垂直とは

どのような場合に「二つの平面(灰色、緑色)は垂直」としたらよい?

※ 赤色の直線は緑色の平面の垂線



③非ユークリッド幾何学入門 双曲幾何のモデル

■ ねらい

このコンテンツでは、非ユークリッド幾何学の双曲幾何のモデルに対するイメージを養うことが意図されている。

■ 該当学年及び時期

大学1・2年生

■ 概要

ユークリッドの5つの公準について解説し、非ユークリッド幾何学の発見に至るおおよその経緯を述べる。

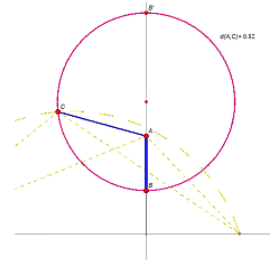
次に、無定義元素、無定義関係について解説し、イメージをつかむための例として、7点幾何の公理系を紹介する。

ポアンカレの上半平面モデルの直線、点、角を解説し、ユークリッドの公準の1から4をCabri3Dの図を使いながら考察する。2点間の距離、ポアンカレの上半平面モデルにおける円についても解説する。

その際、Cabri3Dの図を実際に動かすことによって、2点間の距離を実際に確かめたり、ポアンカレの上半平面における円上の点と円の中心の距離が一定であることを確認したりすることができる。



公準3: 平面上に二点A, Bが与えられたとき、Aを中心としBを通る円を一つ、そして唯一つ描くことができる。



A, Bが図のような位置関係にあるときを考えれば十分(証明略)。
 $d(A, B) = d(A, B')$ であるような点 B' を B の延長上にとる。
 $(BO \cdot B'O = AO^2)$ を満たすようにとればよい)

BB' を直径とする普通の円を描くと、円上の任意の点 C に対して $d(A, C)$ は常に一定の値になる。

つまり、この円はポアンカレのモデルの意味でも「円」。

色、位置をかえてみましょう。

次に、Cabri3Dの図を使い、ポアンカレの上半平面モデルにおける三角形と内角を表示し、実際に三角形を動かしながら、内角の和が180度よりも小さいことを確かめる。

最後に、ポアンカレの円盤モデル、クラインのモデルの図を紹介し、ポアンカレの上半平面

モデルとの関係を確認する。

(4) Web サイトによるコンテンツ等の公開
空間図形の探究的な学習のための Web サイトを構築し、開発された教材コンテンツ、探究的な学習コースに基づく授業例、学習コースに基づく授業用コンテンツを公開した。

Web サイトでは、テーマごとに、スライドのデモンストレーション、ねらい、該当学年及び時期が記載されており、授業用コンテンツが一括でダウンロードできる。



5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Miyazaki, M., Kimiho, C., Katoh, R., Arai, H., Ogihara, F., Oguchi, Y., Morozumi, T., Kon, M., and Komatsu, K., Potentials for Spatial Geometry Curriculum Development with Three-Dimensional Dynamic Geometry Software in Lower Secondary Mathematics, *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 19(2), in press, 2012, 査読有
- ② Fujita, T., Jones, K. and Miyazaki, M. Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: the use of the flowchart proof learning platform. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 353-360. Ankara, Turkey: Middle East Technical University, 2011, 査読有
- ③ Kon, M., Semi-parallel CR submanifolds in a complex space form, *Colloquium Mathematicum*, 124, no. 2, pp. 237-246, 2011, 査読有
- ④ Cho, J. T., Kon, M., The Tanaka-Webster connection and real hypersurfaces in a complex space form, *Kodai Mathematical Journal*, 34, no. 3, pp. 474-484, 2011, 査読有
- ⑤ 小松孝太郎, ラカトシュの可謬主義から

見た数学的探究とその教育的意義, 科学教育研究, 第 35 巻第 3 号, 272-286, 2011, 査読有.

- ⑥ Komatsu, K., How do students generalize a conjecture through proving?: The importance of boundary cases between example and counterexample, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 89-96, Ankara, Turkey: Middle East Technical University, 2011, 査読有.
- ⑦ 昆万佑子, Compact minimal CR submanifolds of a complex projective space with positive Ricci curvature, *Tokyo Journal of Mathematics*, 33 巻, 415-434, 2010, 査読有
- ⑧ 昆万佑子, A minimal real hypersurface of a complex projective space with non-negative sectional curvature, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 81 巻, 488-492, 2010, 査読有
- ⑨ 小松孝太郎, 数学的探究における action proof の活用の促進: 事例研究を通して, *日本数学教育学会誌 数学教育学論究*, 91 巻, 3-29, 2010, 査読有
- ⑩ Miyazaki, M., Cognitive Incoherence of Students Regarding the Establishment of Universality of Propositions through Experimentation/Measurement, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(3), 533-558, 2008, 査読有

[学会発表] (計 14 件)

- ① Kon, M., On 3-dimensional compact real hypersurfaces of a complex space form, *The 15-th International Workshop on Differential Geometry*, 2011.11.2-5, Korea
- ② Fujita, T., Jones, K. and Miyazaki, M. (7/14/2011). Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: the use of the flowchart proof learning platform. *the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2011.7.14, Ankara, Turkey: Middle East Technical University
- ③ Komatsu, K., How do students generalize a conjecture through proving?: The importance of boundary cases between example and counterexample, *The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2011.7.14, Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
- ④ 昆万佑子, 複素空間形の実部分多様体について, 第 5 回 札幌・福岡幾何学セミナー, 2011.2.21-22.北海道
- ⑤ 宮崎樹夫, 学校数学における証明の基礎的学習に関する研究: 証明の構造に基づく関

係的な学習に必要な活動に着目して、日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会、2010.11.13-14、宮崎

- ⑥ 茅野公穂，学校数学での理由の説明・証明を捉える枠組み，日本科学教育学会第34回年会，2010.9.11，広島
- ⑦ Miyazaki, M., Fujita, T., Students' understanding of the structure of proof: Why do students accept a proof with logical circularity?, The 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 2010.8.18-22, Tokyo
- ⑧ Chino, K., Komatsu, K., Miyazaki, M. et al., An assessment framework for students' abilities/competencies in proving, The 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 2010.8.18-22, Tokyo
- ⑨ 宮崎樹夫，茅野公穂，小松孝太郎他，我が国の数学教育における証明研究の課題と展望，日本数学教育学会第42回数学教育論文発表会，2009.11.7-8，静岡
- ⑩ 茅野公穂，カリキュラムにおける証明の居場所を捉える枠組み，日本科学教育学会第33回年会，2009.8.25，京都
- ⑪ Miyazaki, M., Yumoto, T., Teaching and learning a proof as an object, The 19th the International Commission on Mathematical Instruction, ICMI Study 19 Conference, Proof and proving in mathematics education, 2009.5.10-15, Taiwan

〔図書〕(計3件)

- ① Miyazaki, M. & Fujita, T., Proving as an explorative activity in mathematics education. In B. Sriraman, & et al. (Eds.), The first sourcebook on Asian research in mathematics education. Charlotte, NC: Information Age Publishing, in press, 2012.
- ② 小松孝太郎，数学の学習論・学習者論，大高泉・清水美憲（編著），『教科教育の理論と授業：数理編（新教職教育講座シリーズ第6巻）』（第I部第5章），協同出版，2012，pp.71-84.
- ③ 宮崎樹夫他，図形概念と操作、『算数教科教育研究』（第4章第1節）、学芸図書出版、2010、pp.41-49

〔その他〕

<http://www.schoolmath.jp/3dcontent/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩永 恭雄 (IWANAGA YASUO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：80015825

(2) 研究分担者

伊藤 武廣 (ITO TAKEHIRO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：00015827

宮崎 樹夫 (MIYAZAKI MIKIO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：10261760

茅野 公穂 (CHINO KIMIHO)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号：20400658

小松 孝太郎 (KOMATSU KOTARO)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号：40578267

昆 万佑子 (KON MAYUKO)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号：70507186

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

新井 仁 (Arai Hitoshi)
国立教育政策研究所・調査官
研究者番号：40641543

荻原 文弘 (Ogihara Fumihiro)
佐久長聖高等学校・教諭
研究者番号：なし

小口 祐一 (Oguchi Yuichi)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：70405877

加藤 龍平 (Kato Ryuhei)
国立教育政策研究所・調査官
研究者番号：10618648

北島 茂樹 (Kitajima Shigeki)
筑波大学附属中学校・教諭
研究者番号：なし

馬場 直樹 (Baba Naoki)
長野県伊那市立春富中学校・教諭
研究者番号：なし

湯本 武司 (Yumoto Takeshi)
長野県松本市立開成中学校・教諭
研究者番号：なし