

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20340004

研究課題名（和文） 巡回ヘッケ代数の表現論のさらなる発展を目指して

研究課題名（英文） Towards further development of the representation theory of cyclotomic Hecke algebras

研究代表者

有木 進 (ARIKI SUSUMU)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：40212641

研究成果の概要（和文）： Lie 理論において重要な役割を果たしているヘッケ代数と呼ばれる有限次元代数の表現論を研究した。とくに数理物理由来のフォック空間を有限次元代数で圏化する研究は近年大きな進展のある研究であり、その進展に寄与する結果もいくつか得た。具体的には、アフィン A 型ヘッケ代数の既約加群の幾何的実現と代数的実現の同定、変形フォック空間の圏化による量子シューア代数の次数付分解係数の計算理論等が得られた。

研究成果の概要（英文）： We have studied the representation theory of Hecke algebras, certain finite dimensional algebras which play important roles in Lie theory. Fock spaces originally appeared in mathematical physics and the categorification of the Fock spaces is an active field of research in recent days. We have also obtained several results which contribute to the development. The results obtained in the research include, identification of geometric and algebraic constructions of irreducible modules over the affine Hecke algebra of type A, theory to compute graded decomposition numbers of a graded quantized Schur algebra via categorification of the deformed Fock space, etc.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2009年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2010年度	2,800,000	840,000	3,640,000
年度			
年度			
総計	8,300,000	2,490,000	10,790,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：表現論

1. 研究開始当初の背景

研究課題にある巡回ヘッケ代数とは研究代表者と Broue-Malle-Rouquier により独立に導入された有限次元代数であり Lie 理論に現れる有限次元代数の理論の自然な一般化を与えている。

初期の研究では、研究代表者による標準基底を用いた分解係数の決定等の成果があったが、本研究ではこれらの先行研究で確立された言語が重要である。

すなわち、非線型可積分系の重要な例のひとつである KP 方程式の理論から生ま

れた表現論的な Fock 空間の取り扱い、神保・三輪らによる可解格子模型の研究を経て結晶基底の理論に結実したがこの理論が巡回ヘッケ代数の言語を与えるのである。以下に少しだけ説明を加えよう。

高階の変形 Fock 空間の結晶基底は多重ヤング図形全体のなす集合で与えられ、真空の生成する部分加群の結晶基底はその部分集合をなすのであるが、初期の研究代表者の結果によれば、多重ヤング図形の大きさを固定して得られる結晶基底の部分集合により巡回ヘッケ代数の既約加群の同型類が分類される。他方、可解格子模型の研究では同じ結晶基底が別種の多重ヤング図形の集合を用いて実現されるが、Geck-Jacon の研究によれば、この集合は Lusztig のセル理論で基本的な役割を果たす a -値により定義される B 型ヘッケ代数の標準基本集合として現れる。これはもっと一般的な定理の特別な例に違いない、というのがこの分野の研究者の共通認識である。巡回ヘッケ代数を与えたとき、変形高階 Fock 空間をどのように選ぶべきかに関しては、Rouquier の結果により、巡回ヘッケ代数のパラメータの対数値を選ぶことで定まる種々の多重荷電によって定義される変形高階 Fock 空間の族を選ぶのが妥当であると考えられている。

以上のように、ヘッケ代数の既約加群を分類する結晶基底に対し、異なる実現が現れてくるのはなぜか、これを明らかにしたいというのが研究代表者の動機であるが、一般的な定理を構築するためのひとつの自然な枠組みは変形高階 Fock 空間の次数付準遺伝的代数による圏化の族が存在して、次数付分解係数を係数にもつ Uglov の標準基底が結晶基底の実現を与える、というものである。

圏化は Kazhdan-Lusztig によるヘッケ代数の研究や、Lusztig の量子群の研究に代表されるように表現論の研究において重要な手法を与えるものであるが、近年は圏化自体を目的として研究するようにもなってきた。上記で触れた研究代表者の研究も、ある Kac-Moody 代数の可積分表現を巡回ヘッケ代数の加群圏を用いて圏化した点が重要であった。Khovanov-Mazorchuk-Stroppel は彼らの定義のもとで研究代表者の上記研究について論じているが、我々の問題意識では圏化に結晶基底の実現が伴う点が重要である。そこで研究代表者は、準遺伝構造、セル代数構造、柏原結晶の関係を

含んだ圏化予想を構想し、その一部分を実現することを目的として研究計画を申請した。

この間、より一般の Kac-Moody 代数の可積分加群の圏化を実現する代数が Khovanov-Lauda, Rouquier により導入され、Brundan-Kleshchev によって研究代表者の例を含むことが示されるなど、巡回ヘッケ代数の研究はさらに重要性を増しつつ今日に至っている。

2. 研究の目的

前節で述べた圏化予想をより具体的な定理として成立させるためには、まずは巡回ヘッケ代数の準遺伝被覆をヘッケ代数の表現論から理解すること、および付随する有理 Cherednik 代数の表現論を一般論の中に位置づけることが重要なテーマである。しかし申請時の研究計画書にあるように、この目的だけでも多くの困難が予想されたことから、申請時の研究計画では

- (1) 階数の低いヘッケ代数に例を絞って計算すること、
- (2) ヘッケ代数の表現論にまだ残っている未解決の問題を解決すること、

を研究目的の柱としていた。

まず(1)について述べる。圏化予想は B 型ヘッケ代数の場合に限っても殆ど何も知られていない。Geck によりこの場合は Kazhdan-Lusztig 基底を用いたセル代数構造が存在することが予想されており、セル加群は準遺伝被覆の標準加群の像になっているはずであるが、準遺伝被覆とは決して一意に定まるものではないのであるから、たとえば

- (a) 標準加群の個数が多重ヤング図形の個数に等しい準遺伝被覆はどの程度あるのか、
- (b) また標準加群の Schur 関手による像はセル加群になるのか、
- (c) コホモロジー的情報に関して例えば 0-忠実性はどれ位期待できるのか、などの基本的な事実からしてよくわかっていなかった。故に低階のヘッケ代数において具体的に調べるのが重要だったのである。以前の研究代表者の研究により、低階の B 型ヘッケ代数の直既約射影加群の構造は完全にわかっており、とくに B_2 型の場合は特殊双列代数か中山代数しか現れない。つまりすべての直既約加群が分類可能であるから、計算が複雑にはなるにせよ原理的には準遺伝

被覆の分類が可能である。このアイデアのもとで実際に計算をして圏化予想の成り立つ状況を調べてみようというのが研究目的であった。

次に(2)について述べよう。巡回ヘッケ代数の表現論にはまだ未解決の問題があり、当時はたとえばパラメータが1のベキ根の場合のA型アフィンヘッケ代数の既約加群のGinzburgによる幾何的手法による構成と、アフィンヘッケ代数の商代数である巡回ヘッケ代数のセル代数構造を用いた構成の関係が知られていなかった。同じ問題をVignerasの構成に対し考えることも重要である。また、ヘッケ代数の準遺伝被覆は、A型のときは例えば q -Schur代数であり、Hemmer-Nakanoによって調べられていたことから、この知見をもとに次数付 q -Schur代数を導入してMisra-Miwaの元々の変形Fock空間の圏化を実行し、Varagnolo-VasserotのLeclerc-Thibon標準基底に関する結果を最終形に仕上げることなども研究代表者が当時重要と考えていた未解決問題であった。

3. 研究の方法

研究の方法は以下の通りであった。

- (1) 研究代表者の当時の所属は京都大学数理解析研究所であったことから、数理解析研究所において表現論セミナーを主催していたが、連携研究者の庄司俊明氏、谷崎俊之氏にお願いして、名古屋大・大阪市立大・京大数理解析の表現論セミナーが有機的に連携していくことを目指した。
- (2) 連携研究者および関連研究者とともに量子群と代数群の表現論研究集会を運営または援助した。その他数理解析研究所で実施された国内の研究集会などに参加した。
- (3) 英国Cambridge大学Isaac Newton研究所において実施された代数的Lie理論の研究プログラム等、海外の研究集会に参加し、研究発表及び研究交流を行った。

(1), (2)は、国内の関連研究者との研究連絡及び研究討論、若手研究者育成、の2つの目的があった。

(3)は国外関連研究者との研究交流や新知見の吸収のため、または招待講演などの形での研究集会参加である。

定期的な表現論セミナーの実施や国内外研究集会への参加を通じて研究討論

を行い、新しいアイデアの発掘に努めて理論を進展させるようにした。その他の時間は、本務校において種々の具体的な計算を実行し、関連文献を読み込むなど通常の数学研究の形態をとった。

その結果、次節にあるような研究成果を得ることができた。

4. 研究成果

研究成果は下記の4点である。

- (1) アフィンA型ヘッケ代数のモジュラー分岐則を証明したこと、及び、既約加群の幾何的実現と代数的実現の加群対応を決定したこと。
- (2) 次数付 q -Schur代数によるFock空間の圏化を与え、基礎体の標数が0のときLeclerc-Thibonの与えた標準基底を用いて次数付分解係数を計算できることを示したこと。
- (3) B_2 型ヘッケ代数の準遺伝被覆を考え、標準加群の個数が5という条件のもとでの準遺伝構造の分類および準遺伝構造とセル代数構造の対応等を調べたこと。
- (4) Uglovの変形高階Fock空間における2種類の標準基底の変換行列の成分が非負整数係数多項式であることを示したこと。

(1), (2)で得られた結果はすべてarXivを通じて公開済みであり、現在投稿中である。(3)はまだ例が得られた段階であるのでこれをもとに一般論を構築すべく研究を継続中である。(4)はProc. Edinburgh Math. Soc.に掲載決定済である。

その他、Dipper-Jamesの有限体上の一般線形群の非等標数モジュラー既約表現の分類理論について執筆し、ブロック理論以外の7章294頁を関連研究者に公開した。

(1)の結果を述べるためにモジュラー分岐則について説明する。一般に有限次元代数の列を考えるとき、 n 番目の有限次元代数から $n-1$ 番目の有限次元代数への既約加群の制限則を求めることは表現論においては基本的な問題のひとつである。たとえば対称群の有理数係数の群代数を考えると、ヤング図形の箱をひとつ消す、というきれいな規則で表わされる。ところが群代数が半単純でなくなると事態はもっと複雑になり、制限した表現加群の台基のみを考察するのが現実的となって、これをモジュラー分岐則と呼ぶ。LeclercはKleshchev, Brundanの得たモジュラー分岐則が結晶基底の言葉で記述できることに気付いた。研究代表者はこの記述方法が巡回ヘッ

q-代数に対しても成り立つことを以前示したが、今回はそれをアフィンA型ヘッケ代数に対しても示した。これは Jacon, Lecouvey 両氏との共同研究である。証明は二種類与えた。ひとつは研究代表者の巡回ヘッケ代数のモジュラー分岐則の結果を利用するものであり、もうひとつは Lusztig, Ginzburg らによる理論に立ち返って直接証明するものである。モジュラー分岐則を用いると上記で述べたように既約加群の幾何的実現と代数的実現の加群対応を決定することができる。主定理はこの対応が結晶基底の埋め込み写像で記述されることである。幾何的実現は偏屈層の押し出しを用いる高度に非自明なものであるから、組合せ論的に計算可能な加群と同定できたことは有用であると思われる。

(2)の結果は Varagnolo-Vasserot の結果を精密化したものである。研究の目的の欄で述べたように、Varagnolo-Vasserot は Misra-Miwa Fock 空間の圏化を得たが、これは研究代表者の初期の結果と同じく、変形 Fock 空間ではなく、通常の Fock 空間の圏化を行ったものであった。結晶基底との関係をみるためには変形 Fock 空間を圏化するべきであるが、KLR 代数を用いて圏化を実行し、とくに基礎体の標数が0のとき Leclerc-Thibon の標準基底が次数付分解係数を計算することを示した、というのがここで得られた結果である。圏化予想に向けた第1歩であるが、次で述べる(3)の結果が示すように、B型の場合は多くの新しい困難が生じる。

(3)は研究目的の欄に記述したように、圏化予想が成り立つための条件を調べ、圏化予想の枠組みの構築をするために、B型の例を調べたものであり、昨年まで指導していた京都大学理学研究科・原田和桓君に具体的な計算をしてもらった。その結果、

- (i) パラメータが-1を含む場合には0-忠実な準遺伝被覆は存在しないこと、
- (ii) 標準加群の Schur 関手による像は0にさえなり得ること、また既約加群の直和にもなり得ること、

等がわかった。一般論構築のための方向性はある程度見えたが、来年度以降の研究テーマとした。

(4)は次数付 q-Schur 代数の分解係数と標準基底の関係の一般化についての研究であり、(1)と同じく Jacon, Lecouvey 両氏との共同研究である。高階 Fock 空間を高階 q-Schur 代数と関連付けることが大きな目標であるが現時点ではまだ難しい。そこで、Geck と Rouquier がヘッケ代数の分解写像が2つの写像の合成に書けることを示していることに注目し、この結果が次数付に精密化できる

ための必要条件としてフォック空間の2種類の標準基底の間の変換行列の成分が非負整数係数多項式になる、という条件が成り立つかどうかを考察した。結論としてこの条件が確かに成り立っていることを示した。

(1)-(4)以外にも、A型ヘッケ代数の準遺伝被覆の AR-軌道の研究、整数係数の対称群の群代数のヤング部分群による中心化代数の研究を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Susumu Ariki, Nicolas Jacon, Cedric Lecouvey, Factorization of the canonical bases for higher level Fock spaces, Proc. Edinburgh Math. Soc., 査読有, 掲載決定済. 巻号, 出版年, 頁番号は未定.
- ② Susumu Ariki, Nicolas Jacon, Dipper-James-Murphy's conjecture for Hecke algebras of type B_n , Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Progr. Math., 査読有, 284 巻, (2010), 17-32.
- ③ Susumu Ariki, Finite dimensional Hecke algebras, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, EMS series of Congress reports, 査読有, 1 巻, (2008), 1-48.
- ④ Susumu Ariki, Victor Kreiman, Shunsuke Tsuchioka, On the tensor product of two basic representations of $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_e)$, Adv. Math., 査読有, 218 巻, (2008), 28-86.

[学会発表] (計6件)

- ① Susumu Ariki, Introduction to KLR algebras, Diagram algebras and related topics, 2010. 7. 6, 数理解析研究所合宿型セミナー (沖縄)
- ② Susumu Ariki, Modular branching rule for the affine Hecke algebra of type A, A conference on interplay between representation theory and geometry, 2010. 5. 5, 北京清華大学, 中華人民共和国
- ③ Susumu Ariki, Modular branching rule for the affine Hecke algebra of type A, Combinatorial Representation Theory, 2010. 3. 23, Oberwolfach 数学研究所, ド

- イツ連邦共和国
- ④ Susumu Ariki, Graded q -Schur algebras, Representation Theory and Lie Theory, 2009. 6.23, Isaac Newton Institute, Cambridge 大学, イギリス連合王国
 - ⑤ Susumu Ariki, Simple modules of the affine Hecke algebra of type A, Workshop on Algebras in Lie theory, 2008. 9.11 丹原国際セミナーハウス
 - ⑥ 有木進, Simple modules of the affine Hecke algebra of type A over C , 組合せ論的表現論の拡がり, 2007.10.7 数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

有木 進 (ARIKI SUSUMU)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：40212641

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

加藤 周 (KATO SYU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：40456760

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70142916

庄司 俊明 (SHOJI TOSHIAKI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：40120191