

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2012

課題番号：20340007

研究課題名（和文） 頂点代数、特に W 代数の総合的研究

研究課題名（英文） A comprehensive research of vertex algebras, especially the W-algebras

研究代表者

荒川 知幸 (ARAKAWA TOMOYUKI)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：40377974

研究成果の概要（和文）：アフィンリー環の許容表現に関して、両側 BGG リゾリューションに関する Frenkel-Kac-脇本の予想、対応する頂点作用素代数に関する Adamovic-Milas の予想、及び特異台に関する Feigin-Frenkel 予想を肯定的に解決した。アフィンリー環の臨界レベルの表現について Feigin-Frenkel 予想の一部である new linkage principal を証明し、また chiral Borel-Weil-Bott の定理を確立した。W 代数に関し、Kac-脇本により発見された全ての例外的 W 代数の C2 条件を証明し、さらに主巾零軌道に付随する極少系列 W 代数の有理性に関する Frenkel-Kac-脇本の予想を肯定的に解決した。また臨界レベルの W 代数に関して様々な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：On admissible representations of affine Kac-Moody algebras, we proved the conjecture of Frenkel, Kac and Wakimoto on the existence of two-sided BGG resolutions, the conjecture of Adamovic and Milas on the corresponding vertex operators algebra, and the conjecture of Feigin and Frenkel on their singular supports. On critical level representations of affine Kac-Moody algebras, we proved the new linkage principal and established a chiral Borel-Weil-Bott theorem. On W-algebras, we prove the C₂-cofiniteness of the exceptional W-algebras discovered by Kac and Wakimoto and prove the admissible representations of affine Kac-Moody algebras. We obtained various results on the W-algebras at the critical levels.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2009 年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2010 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2011 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2012 年度	2,600,000	780,000	3,380,000
総計	13,100,000	3,930,000	17,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：W 代数、アフィンリー環、頂点代数

1. 研究開始当初の背景

(1) Borcherds [Bor86] によって導入された頂点代数は理論物理学の弦理論の研究に起

源を持つが、これまでの多くの研究により物理学や数学の様々な側面と関わりを持つことが明らかにされてきた。このような頂点

代数の中で最も興味深いもののうちの1つが W 代数である. W 代数は Virasoro 代数や “ほぼ全ての” スーパーコンフォーマル代数を特殊な場合として含む極めて大きな頂点代数の族であり, ソリトン方程式, 幾何学的 Langlands 対応, アフィンリー環の表現論, モンスター群, Whittaker 模型, モジュラー表現論, クライン特異点の非可換変形などさまざまな数学的対象と密接な関係がある.

(2) W 代数は共形場理論の分類の研究の中で Zamolodchikov によって最初に導入された. Feigin-Frenkel, Kac-Roan-脇本等の仕事により, 現在では W 代数は複素単純リー環 \mathfrak{g} とその冪零軌道に付随して BRST コホモロジーを用いて定義される. 当時までの研究の中で申請者は, 極小冪零軌道及び主冪零軌道の場合に W 代数の全ての既約最高ウェイト表現の指標を (Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて) 決定し, これらの結果を他の冪零軌道の場合に拡張する論文を現在準備中であつた.

(3) 上記既約最高ウェイト表現の指標の決定それ自身は満足ゆくものではあつたが, 他の数学的対象との関係と言う点では依然 W 代数はミステリアスであり, より深い理解が求められていた.

2. 研究の目的

主に次の視点から W 代数を研究する.

- 1) アフィン Lie 環のモジュラー表現論との関わりにおいて
- 2) アフィン Lie 環の臨界レベルの表現論との関わりにおいて
- 3) アフィン Lie 環の最高ウェイト表現の随伴多様体との関わりにおいて
- 4) モンスター群との関わりにおいて.

3. 研究の方法

本研究は, 頂点(作用素)代数, モジュラー表現論, アフィン Lie 環の表現論, 保型形式論, 群論, 特異点論, 幾何学的表現論, 偏微分方程式, 素粒子論と広範囲な分野にまたがっているため, 研究遂行には各分野の研究者との交流が必要不可欠である. そのため, 国内外の専門家の招聘, 国際研究集会の開催, 共同研究者との綿密な議論及び研究打合せや研究会等で情報収集のための旅費に研究経費の多くが当てられる.

共同研究者とは, 普段は E メールにて議論を行う. 研究打合せは国内共同研究者とは月に一, 二回の割合で定期的に行い, 国外共同研究者とは年に一, 二回の割合で不定期に行う.

4. 研究成果

(1) Peter Fiebig との共同研究によりアフィン Lie 環の臨界レベルの表現に関して restricted Verma module について研究した (論文③). さらにこの結果を用いて Feigin-Frenkel 予想の一部である new linkage principal を証明した (論文⑤).

(2) ねじれたカイラル微分作用素の理論を導入し臨界レベルの G 可積分な表現の旗多様体上への局所化を行った (Dmytro Chebotarov, Fyodor Malikov との共同研究, 論文11) さらに chiral Borel-Weil-Bott の定理を確立した (F. Malikov との共同研究, 論文④).

(3) 頂点代数の随伴多様体の概念を導入し Zhu の C_2 有限性条件が Beilinson-Feigin-Mazur の意味での lisse 条件と同値であり, 従って自然な有限性条件であることを示した (論文⑥).

(4) W 代数の随伴多様体とアフィン頂点代数の随伴多様体の関係を明らかにした. また許容アフィン頂点代数に関する Feigin-Frenkel の予想を解決し, 許容アフィン頂点代数の随伴多様体を決定した. さらに全ての Kac-脇本の例外型 W 代数を含む多くの W 代数の C_2 有限性を証明した (arXiv:1004.1554, 論文投稿中).

(5) 例外的 W 代数のうち s_{13} の極小冪零元に付随するもの (Bershadsky-Polyakov 代数) の有理性を証明した (論文①).

(6) 臨界レベルの W 代数の中心が Feigin-Frenkel center に等しいことを示し, さらに臨界レベルの単純 W 代数が Slodowy の横断片と \mathfrak{g} の冪零錘との共通部分のアーキ空間の量子化であることを示した (論文⑦). また asymptotic chiral differential operator の理論を導入し, 臨界レベルの単純 W 代数を Slodowy 多様体のアーキ空間上に局所化した (桑原俊郎, F. Malikov との共同研究, arXiv:1112.0089).

(7) s_{12} に付随するパラフェルミオン頂点作用素代数の Zhu 代数と C_2 代数を決定し, さらに任意の単純 Lie 環に付随するパラフェルミオン頂点作用素代数の C_2 有厳性を示した (Ching Hung Lam, 山田裕理との共同研究, arXiv:1207.3909, 論文投稿中).

(8) アフィン Lie 環の許容表現の two-sided BGG resolution に関する Frenkel-Kac-脇本の予想を証明した

(arXiv:1207.4276, 論文投稿中).

(9) アフィン Lie 環の許容表現に付随する頂点作用素代数の最高ウェイト既約表現を分類し, 特に Adamovic-Milas の予想を肯定的に解決した (arXiv:1207.4857, 論文投稿中).

(10) 主巾零軌道に付随する極少系列 W 代数の有理性に関する (Frenkel-)Kac-脇本の予想を肯定的に解決した (arXiv:1211.7124, 論文投稿中).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Tomoyuki Arakawa, Rationality of Bershadsky-Polyakov vertex algebras, to appear in Comm. Math. Phys. 査読有
<http://arxiv.org/pdf/1005.0185.pdf>
- ② M. Ando, T. Suzuki, H-F. Yamada, Combinatorics for Graded Cartan Matrices of the Iwahori-Hecke Algebra of Type A, to appear in Annals of Combinatorics. 査読有
<http://arxiv.org/pdf/1005.1134.pdf>
- ③ T. Arakawa, P. Fiebig, On the restricted Verma modules at the critical level, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 4683-4712. 査読有
DOI:10.1090/S0002-9947-2012-05467-5
- ④ T. Arakawa, F. Malikov, A chiral Borel-Weil-Bott theorem, Adv. Math., 229 (2012) 2908-2949. 査読有
DOI:10.1016/j.aim.2011.11.002
- ⑤ T. Arakawa, P. Fiebig, The linkage principle for restricted critical level representations of affine Kac-Moody algebras, Compos. Math., 148, (2012) 1787-1810. 査読有
DOI:10.1112/S0010437X12000395
- ⑥ Tomoyuki Arakawa, A remark on the \mathbb{C}_2 -cofiniteness condition on vertex algebras, Math. Z. vol. 270, no. 1-2, 559-575, 2012. 査読有
DOI:10.1007/s00209-010-0812-4
- ⑦ Tomoyuki Arakawa, W -algebras at the critical level, Contemp. Math., 565, 1--14, 2012. 査読有
<http://arxiv.org/pdf/1111.6329v1.pdf>
- ⑧ Gerald Hoehn, Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi: McKay's E7 observation on the Babymonster, International Mathematics Research Notices Vol. 2012 166-212 (2012). 査読有
DOI: 10.1093/imrn/rnr009
- ⑨ Gerald Hoehn, Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi: McKay's E6 observation on the largest Fischer group, Communications in Mathematical Physics 310 Vol. 2 (2012), 329-365. 査読有
DOI: 10.1007/s00220-011-1413-8
- ⑩ Tomoyuki Arakawa, Representation theory of W -algebras, II, Adv. Stud. Pure Math. 61(2011), 51--90. 査読有
DOI URL なし
- ⑪ T. Arakawa, D. Chebotarov and F. Malikov, Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of \mathfrak{g} -modules, Sel. Math. New Ser., vol.17, no. 1, 1-46, 2011. 査読有
DOI:10.1007/s00029-010-0040-0
- ⑫ Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi: The FLM conjecture and framed VOA, Vertex operator algebras and related areas, 125-138, Contemporary Mathematics 497, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. 査読有
<http://www.math.twc.u.ac.jp/~yamauchi/math/illinois2008/illinois2008.pdf>
- ⑬ Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi: On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, Communications in Mathematical Physics 277 (2008), 237-285. 査読有
DOI: 10.1007/s00220-007-0323-2
- ⑭ Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi: Binary codes and the classification of holomorphic framed vertex operator algebras, RIMS Kokyoroku Bessatsu B8 (2008), 131-150. 査読有
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B8/pdf/B8-11.pdf>

[学会発表] (計 58 件)

- ① Hiroshi Yamauchi, On 3-transposition groups based on the 3A-algebra, Taitung Workshop, Taitung University, Taitung, Taiwan, March 27th, 2013.
- ② 代数学賞受賞特別講演「W 代数の表現論」荒川 知幸、日本数学会年会、2013 年 3 月 22 日、京都大学
- ③ Hiroshi Yamauchi, Binary codes and classification of framed vertex operator algebras, Exceptional structures in geometry and field theory, IPMU, March 7th, 2013.
- ④ A mini-course lecture, Tomoyuki Arakawa, Catégorie 0: géométrie et catégorification, 10-14 December 2012, CIRM, Luminy. (France)
- ⑤ A mini-course lecture, Tomoyuki Arakawa, Algebraic Structures in Integrable Systems, December 3-7, 2012, Moscow (Russia)
- ⑥ “Nilpotent orbits and the Kac-Wakimoto conjecture”, Tomoyuki Arakawa, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, September 10 - 14, 2012, University of Tsukuba, Japan.
- ⑦ Hiroshi Yamauchi, Miyamoto involutions, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 筑波大学, 2012 年 9 月 10 日
- ⑧ “Rationality of W -algebras”, Tomoyuki Arakawa, Conference on Vertex Operator Algebra and Related Topics August 24 - 27, 2012, Shanghai Jiao Tong University, China.
- ⑨ Hiroshi Yamauchi, 3A-algebra and 3-transposition property, Conference on Vertex Operator Algebras and Related Topics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, August 25th, 2012.
- ⑩ “Rationality of W -algebras”, Tomoyuki Arakawa, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, August 20-26, 2012, Chern Institute of Mathematics Tianjin, China.
- ⑪ Hiroshi Yamauchi, Extended Griess algebras, conformal designs and Matsuo-Norton trace formulae, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China, August 20th, 2012.
- ⑫ 山内 博, 共形デザインについて 第 24 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2012 年 7 月 28 日
- ⑬ 山内 博, 拡大グライス代数と松尾-ノートンの跡公式「有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究集会」, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 3 月 5 日
- ⑭ “Localization of W-algebras at the critical level”, Tomoyuki Arakawa, Finite Groups and Vertex Operator Algebras in Honor of Professor Hiromichi Yamada’s 60th birthday, February 17 - 18, 2012, Tokyo Woman’s Christian University, Tokyo, Japan.
- ⑮ 山内 博, 3A 代数と 3 互換群 有限群と頂点作用素代数, 東京女子大学, 2012 年 2 月 17 日
- ⑯ Rationality of admissible affine vertex algebras in the category 0” Tomoyuki Arakawa, Conference on Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Related Topics, December 18-22, 2011, Academia Sinica, Taiwan.
- ⑰ H. Yamauchi, Matsuo-Norton trace formula for vertex operator superalgebras, Conference on Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Related Topics, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, 19 December 2011.
- ⑱ 鈴木武史, 2011 年 11 月 14 日、“分割の数え上げと対称群のカルタン行列”, T. Suzuki, 信州代数セミナー (信州大学)
- ⑲ “Affine W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebra Seminar, October 24, 2011, The University of York, UK.
- ⑳ “Affine W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebra Seminar, October 21, 2011, Lancaster University, UK.
- ㉑ “Affine W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebra Seminar, October 18, 2011, The University of Edinburgh, UK.

- 22 “Affine W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebra Seminar, October 13, 2011, Birmingham University, UK.
- 23 “Affine W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebra Seminar, October 11, 2011, The University of Manchester, UK.
- 24 「カイラルハミルトニアン構成法と表現論-W 代数をめぐる」, 荒川 知幸, 日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 10 月 1 日, 特別講演, 信州大学.
- 25 H. Yamauchi, Trace identity and axial vectors for the Baby-monster, Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics, The MAThematics Center Heidelberg, Heidelberg University, Germany, 19 September 2011.
- 25 “Localization of affine W-algebras at the critical level”, Tomoyuki Arakawa, Perspectives in Algebraic Lie Theory, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK, September 15, 2011.
- 26 “Localization of affine W-algebras at the critical level”, Tomoyuki Arakawa, Algebraic Geometry and Representation Theory Seminar, May 27, 2011, Weizmann Institute of Science, Israel.
- 27 “Admissible affine vertex algebras of type A”, Tomoyuki Arakawa, Algebraic Geometry and Representation Theory Seminar, May 20, 2011, Weizmann Institute of Science, Israel.
- 28 「カイラルハミルトニアン還元法と表現論-W 代数をめぐる」 荒川 知幸, 談話会, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科, 2011 年 5 月 11 日.
- 29 “Kac-Wakimoto conjecture and associated varieties of modules over Kac-Moody algebras”, Tomoyuki Arakawa, Research into Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Combinatorics, Kyoto, December 16, 2010.
- 30 “BRST reduction and representation theory of W-algebras”, 荒川 知幸, 談話会, RIMS, 京都大学, 2010 年 10 月 13 日.
- 31 “Rationality and smoothness of W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups ’ 10 August 2 - 6, 2010, Nagoya, Japan.
- 32 山内 博, 有限群と軌道体理論, 第 2 2 回有限群論草津セミナー, 2010 年 7 月 30 日 草津セミナーハウス
- 33 “Associated varieties of Kac-Wakimoto admissible representations”, Tomoyuki Arakawa, April 19, 2010, USC Algebra Seminar, University of Southern California, USA.
- 34 山内博, 散在型有限単純群と頂点作用素代数, 日本数学会 2010 年度年会, 慶應義塾大学, 2010/03/27
- 35 “Nilpotent orbits and Kac-Wakimoto admissible representations of Kac-Moody algebras”, Tomoyuki Arakawa, 第 9 回巾零軌道と表現論研究集会, 2010 年 2 月 19 日, 北海道大学.
- 36 T. Suzuki, “Lie, Hecke and Cherednik Algebras in Conformal Field Theory” Tokyo-Seoul Confenece in Mathematics, Representation Theory, 2009 年 12 月 5 日, 東京大学
- 37 H. Yamauchi, n-transposition groups and vertex operator algebras, Lie algebras, vertex algebras and automorphic forms, 15 South College Street, Edinburgh, 2009/09/04 UK
- 38 H. Yamauchi, Admissible representation of affine VOAs and modular invariance, Algebras, Groups and Geometries 2009, 玉原国際セミナーハウス, 2009/08/20
- 39 “Varieties of nilpotent orbits, Kac-Moody algebra and C2-cofiniteness of W-algebras”, Tomoyuki Arakawa, Mini Conference on chiral differential operators, IPMU, August 18, 2009.
- 40 「旗多様体上のカイラル微分作用とアフィン Lie 環の表現論」 荒川 知幸, 代数学シンポジウム, 明治大学, 2009 年 8 月 6 日.
- 41 山内博, 互換群と巾等元 第 21 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2009/08/02
- 42 “Varieties of nilpotent orbits, Kac-Moody algebras, and W-algebras”,

Tomoyuki Arakawa, Workshop and Summer School on Lie Theory and Representation Theory II, East China Normal University, Shanghai, China, July 20, 2009.

43 “Affine W -algebras and Zhu’s Poisson varieties associated with Kac-Moody vertex algebras”, Tomoyuki Arakawa, Algebraic Lie Structures with Origins in Physics, March 23, 2009, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK.

44 “Chiral differential operators and affine chiralization of g -modules”, Tomoyuki Arakawa, Taipei Workshop in Lie Theory, December 28, 2008, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan.

45 「 W 代数の指標公式について」荒川 知幸, 談話会, 2008 年 12 月 3 日, 大阪市立大学.

46 「 W 代数の表現論について」荒川 知幸, 特別講演, 2008 年数学会秋季総合 分科会代数学分科会, 2008 年 9 月 26 日, 東京工業大学.

47 A. Matuso, On the transformation property of the Lie algebras associated with vertex operator algebra, International Conference on Vertex Operator Algebras and Related Areas, イリノイ州立大学, 2008 年 7 月 10 日.

48 “Representations of W -algebras and conjectures of Kac-Wakimoto”, Tomoyuki Arakawa, Conference “Symmetries in Mathematics and Physics” to honor the 65th birthday of Prof. Victor G. Kac, June 24, 2008, Cortona, Italy.

49 Representations of W -algebras and affine Kac-Moody algebras”, Tomoyuki Arakawa, Erlangen Representation Theory Days, June 13, 2008, Emmy-Noether-Zentrum, Universität Erlangen-Nürnberg, Germany.

[その他]

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

荒川 知幸 (ARAKAWA TOMOYUKI)

京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：40377974

(2) 研究分担者

松尾 厚 (MATSUO ATSUSHI)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号：20238968

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)
岡山大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号：30335294

山内 博 (YAMAUCHI HIROSHI)
東京女子大学・現代教養部・講師
研究者番号：40452213

(3) 連携研究者

山田 裕理 (YAMADA HIROMICHI)
一橋大学・経済学研究科・教授
研究者番号：50134888

宮本 雅彦 (MIYAMOTO MASAHIKO)
筑波大学・数理物質科学研究科・教授
研究者番号：30125356

松澤 淳一 (MATUZAWA JYUNICHI)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号：00212217

今野 均 (KONNO HITOSHI)
広島大学・理学研究科・准教授
研究者番号：00291477