

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月23日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20340008

研究課題名（和文）離散群のコホモロジーと平坦束の特性類の研究

研究課題名（英文）Cohomology of discrete groups and characteristic classes of flat bundles

研究代表者

秋田 利之（AKITA TOSHIYUKI）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30279252

研究成果の概要（和文）：閉曲面上の有限群作用(閉曲面上の Galois 被覆)全体を同時に扱う枠組みをある種の函手として構成した。作用に対して定義される特性類(Mumford-Morita-Miller 類と Newton 類)を函手の自然変換して記述した。これらの特性類の間の関係を Riemann-Roch 型の公式として記述した。

研究成果の概要（英文）：We construct a functorial framework to deal with all finite transformation groups on closed surfaces (Galois covers on closed surfaces) simultaneously. Characteristic classes associated with such transformation groups, Mumford-Morita-Miller classes and Newton classes, are shown to be natural transformations of functors. These characteristic classes are shown to satisfy Riemann-Roch type formulae.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|------------|
| 2008年度 | 2,700,000 | 810,000 | 3,510,000 |
| 2009年度 | 2,300,000 | 690,000 | 2,990,000 |
| 2010年度 | 2,300,000 | 690,000 | 2,990,000 |
| 2011年度 | 2,300,000 | 690,000 | 2,990,000 |
| 年度 | | | |
| 総計 | 9,600,000 | 2,880,000 | 12,480,000 |

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：細目：数学・幾何学

キーワード：コホモロジー、特性類、線型表現、写像類群、分岐被覆

1. 研究開始当初の背景

離散群の有限次元線型表現が与えられると、離散群の分類空間上に平坦束が定まる。分類空間のコホモロジーは群のコホモロジーと一致するので、平坦束の特性類は群のコホモロジー類を定める。

平坦束の特性類は Cheeger-Chern-Simons 理論に代表されるように、主に2次特性類として微分幾何・微分トポロジーにおいて研究されていた。これは平坦束の1次特性類が実数

係数・複素数係数コホモロジーにおいて自明であることが大きな理由である。

一方で整数係数コホモロジーにおいては、平坦束の1次特性類は一般には非自明な捩れ元(torsion)となり、微分幾何・微分位相幾何的研究が難しい。しかしながら離散群のコホモロジーへの応用には1次特性類としての扱いが不可欠であるということが本研究開始の背景であった。

2. 研究の目的

本研究では離散群のコホモロジーとの関わりに焦点を絞り、離散群の分類空間の平坦束の1次特性類(Chern類、Stiefel-Whitney類、Euler類など)の性質を明らかにすること、得られた結果を具体的な群のコホモロジーの計算・コホモロジー類の構成などに応用することを目的とした。

3. 研究の方法

本研究は具体的な離散群のコホモロジーへの応用を念頭においていることもあり、関連する分野はリーマン面とそれらのモジュライ空間、幾何学的群論、代数トポロジー、有限群の表現論など多岐にわたる。そのため関連する分野の国内外の研究者との情報交換と議論を継続して行う必要があり、その一環として研究打ち合わせと、研究発表を行うために旅費を使用した。また具体的な離散群に対して応用するためには、不変式の生成系や巨大な行列の計算を扱う必要があり、その目的および資料整理などのために計算機を購入した。

4. 研究成果

本研究は(i) 線型表現の特性類 (ii) 離散群の線型表現の有限近似 (iii) 特性類に対する Riemann-Roch 型の定理の3つのテーマにわかれる。これまでに得られた主要な成果を述べる。

- (1) 有限群 G の閉曲面への作用(閉曲面上の G をモノドロミー群とする Galois 被覆) はトポロジー・関数論・代数幾何などにまたがる研究対象であり、多くの研究が成されてきたが、全ての作用を同時に扱うような枠組みはなかった。

本研究では、有限群 G の閉曲面への作用の分岐データの集合のなす可換モノイドを定義し、そのモノイドに Grothendieck 構成を適用することにより、有限生成アーベル群に値をもつ Mackey 関手 $B(G)$ を構成した。 $B(G)$ は全ての作用を同時に扱うような枠組みとなっている。更に $B(G)$ 上に外部自己同型群 $\text{Out}(G)$ の作用と Adams 作用素と類似の作用素を持つことを示した。

閉曲面の写像類群という離散群の有限部分群は $B(G)$ の元に対応しており、 $B(G)$ の構成はテーマ(ii)に関する主要な成果

となっている。具体的な有限群 G に対して $B(G)$ の構造を決定するのは今後の主要な研究の課題である。

- (2) また群作用から定まる特性類 ((Mumford-森田-Miller 類とホモロジー表現の Newton 類)が、 $B(G)$ を定義域とする Mackey 関手の自然変換として記述できることを示した。この結果により、群作用の特性類が線型表現の特性類の「高次化」であることがわかった。

さらに特性類の mod p 還元が周期性を満たすことを示した(雑誌論文②として出版済み)。これは G が巡回群の場合の植村毅氏の結果を任意の有限群に一般化したものである。これらがテーマ(i)の主要な結果である。

- (3) 最後にテーマ(iii)に関しては、 $B(G)$ の性質と Evens による線型表現の Riemann-Roch 公式と Pappas、Ib Madsen による整数係数 Grothendieck-Riemann-Roch 定理を援用することにより、有限群 G の閉曲面への作用に付随する二種類の特性類((2)で出てきた Mumford-Morita-Miller 類と Newton 類)の関係を明らかにした(整数係数あるいは素数 p に対する p 局所的な Riemann-Roch 型の公式)。

また G が有限巡回群の場合には Bernoulli 数の整数論的な性質を用いて、より精密な公式をえている(研究代表者と河澄響矢氏との共同研究として雑誌論文⑨で出版済み)。

以上の成果を更に進展させること、とくに閉曲面上の群作用の特性類の性質を、線型表現の特性類の高次化の視点から明らかにすることは今後の課題である。また、これまでの研究成果は主に2次元の多様体の対称性に付随するものだったが、これまでに得られた結果を高次の多様体の対称性に拡張することも今後の研究テーマとして残される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Keiichi Sakai, Tadayuki Watanabe, 1-loop graphs and configuration space integral for embedded spaces, Mathematical Proceedings of the

- Cambridge Philosophical Society 152 (2012) 497–533. 査読有
DOI: 10.1017/S0305004111000429
- ② Toshiyuki Akita, Periodicity for Mumford–Morita–Miller classes of surface symmetries, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 47 (2011) 897–909. 査読有
DOI: 10.2977/PRIMS/55
- ③ Tadayuki Watanabe, On Kontsevich’s characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. II. Higher classes, Journal of Topology 2 (2009) 624–660. 査読有
DOI: 10.1112/jtopol/jtp024
- ④ Tadayuki Watanabe, On Kontsevich’s characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. I. The simplest class, Mathematische Zeitschrift 262 (2009) 683–712. 査読有
DOI: 10.1007/s00209-008-0396-4
- ⑤ Toru Ohmoto, Thom polynomial and around, RIMS Kōkyūroku Bessatsu B11, New Trends in Combinatorial Representation Theory (eds. S. Ariki and M. Okado) (2009) 75–86. 査読有
- ⑥ 大本 亨, 特異点の数え上げと同変 Chern 類, 数学 61 (2009) 21–39. 査読有
- ⑦ Toshiyuki Akita, On mod p Riemann–Roch formulae for mapping class groups, Advanced Studies in Pure Mathematics 52 (2008) 111–118. 査読有
- ⑧ Toshiyuki Akita, A formula for the Euler characteristics of even dimensional triangulated manifolds, Proceedings of the American Mathematical Society 136 (2008) 2571–2573. 査読有
DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09148-X
- ⑨ Toshiyuki Akita, Nariya Kawazumi, Integral Riemann–Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 144 (2008) 411–421. 査読有
DOI: 10.1017/S0305004107001016
- ⑩ Toru Ohmoto, Generating functions of orbifold Chern classes I: Symmetric Products, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 144 (2008) 423–438. 査読有
DOI: 10.1017/S0305004107000898
- ⑪ Toshiyuki Akita, Surface symmetries, homology representations, and group cohomology, 数理解析研究所講究録 1581 (2008) 103–108. 査読無
- [学会発表] (計 22 件)
- ① Toshiyuki Akita, Surface symmetries and equivariant characteristic classes, Topology of Singularities and Related Topics III (JSPS–VAST Japan–Vietnam Bilateral Joint Projects), 2012 年 3 月 29 日, University of Dalat, Dalat, ベトナム.
- ② Toru Ohmoto, Singular Chern class and degree formula, 第 7 回代数・解析・幾何セミナー, 2012 年 2 月 15 日、鹿児島大学理学部
- ③ Tadayuki Watanabe, Obstructions for π_1 of the space of pseudo-isotopies of disks in non-stable range, The 4th East Asian Conference on Algebraic Topology, 2011 年 12 月 9 日, 東京大学大学院数理科学研究科.
- ④ Toshiyuki Akita, Surface symmetry and cohomology of finite groups, Seminários de Topologia, 2011 年 9 月 2 日, ICMC–USP, São Carlos, ブラジル.
- ⑤ Toru Ohmoto, Thom polynomial associated to the Milnor number of ICSC, Banach Center Conference, Workshop on Singularities in Geometry and Application, 2011 年 5 月 21 日, ポーランド.
- ⑥ Toshiyuki Akita, Mackey functors associated with surface symmetries, 第 6 回代数・解析・幾何セミナー, 2011 年 2 月 15 日、鹿児島大学理学部
- ⑦ Toru Ohmoto, Chern class for singular spaces, JSPS–VAST Japan–Vietnam Bilateral Joint Projects Topology of singularities and related topics II, 2011 年 1 月 6 日、東北大学大学院理学研究科
- ⑧ Toru Ohmoto, Vassiliev type invariants revisited, The 11th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2010 年 7 月 27 日, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ブラジル.
- ⑨ Tadayuki Watanabe, Kontsevich’s graph characteristic classes of smooth bundles, Quantum algebra related to various topological field theories in geometries, 2009 年 2 月 16 日、京都大学理学部

[その他]
ホームページ等
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~akita/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

秋田 利之 (AKITA TOSHIYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：30279252

(2) 研究分担者

大本 亨 (OHMOTO TORU)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20264400
渡邊 忠之 (WATANABE TADAYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・助教
研究者番号：70467447
吉田 知行 (YOSHIDA TOMOYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：30002265

(3) 連携研究者

栗林 勝彦 (KURIBAYASHI KATSUHIKO)
信州大学・理学部・教授
研究者番号：40249751
柳田 伸顕 (YAGITA NOBUAKI)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：20130768