様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月１０日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：20340009
研究課題名（和文）　高次の幾何構造に付随する変分問題の研究

研究課題名（英文）　Research on variational problems associated with higher order geometric structures

研究代表者
西川　青季（NISHIKAWA SEIKI）
東北大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60004488

研究成果の概要（和文）：フィンスラー構造や共形構造などの高次の幾何構造に付随する変分問題を多面的に研究した結果，次の諸事実を証明した．１）リーマン球面から正曲率をもつ弱ケーラー・フィンスラー多様体へのエネルギー最小な調和写像は，正則または反正則写像となる．２）閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への正則写像でない調和写像の特異集合は，有限集合である．３）体積を保つ共形変形のもとで，正のスカラー曲率をもつアインシュタイン計量は，全 Q 曲率の安定な臨界点である．

研究成果の概要（英文）：Through a multidisciplinary research on variational problems associated with higher order geometric structures, such as Finsler structures and conformal structures, we prove the following. 1) Any energy minimizing harmonic map from the Riemann sphere into a weakly Kaehler Finsler manifold of positive curvature is either holomorphic or antiholomorphic. 2) The singular set of a nonholomorphic harmonic map from a compact Riemann surface into a complex Finsler manifold is a finite set. 3) Under volume preserving conformal variations of metrics, each Einstein metric of positive scalar curvature is a stable critical point of the total Q curvature.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	3,200,000	960,000	4,160,000
２００９年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
２０１０年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
２０１１年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
総　計	13,500,000	4,050,000	17,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：調和写像，エネルギー汎関数，複素フィンスラー計量，全Q曲率，高次の幾何構造，変分問題

１．研究開始当初の背景

微分幾何学の研究主題は，微分可能多様体およびその上で定義される幾何構造である．このような幾何構造の多くは，微分可能多様体の高階の接束あるいは高次のジェット束の部分束への簡約として，統一的に定式化することができる．

微分可能多様体の研究において，従来はリーマン計量やエルミート計量など接束上の内積として定義される計量構造が用いられ，大きな成功を収めてきた．しかし，物理学や生物学の問題においては，むしろノルムとし

て定義されるフィンスラー計量が自然に現れることが多い.

また数学の問題においても，多変数複素関数論の研究で重要な役割を果たす小林計量やカラテオドリー計量などは，従来のエルミート計量ではなく，複素フィンスラー計量に他ならない.

このようなフィンスラー計量は，実は２階の接束上のリーマン計量を自然に定義し，このリーマン計量を平行にし，かつ一般に捩率をもつ標準接続を定める．この意味で，リーマン計量は１次の幾何構造であるが，フィンスラー計量は２次の幾何構造であると解釈される.

同様に，共形構造や CR 構造も，自然に２次のジェット束の簡約を定義し，標準的なカルタン接続が対応することが知られており，２次の幾何構造であると捉えることができる.

よって，これらの幾何構造は，従来の計量構造よりも「高次の幾何構造」と理解することができる．とくに，１９７５年に証明された小林の定理によれば,「コンパクト複素多様体上の正則ベクトル束が豊富であることと，その双対束が負曲率な強擬凸複素フィンスラー計量をもつことが同値である」ので，正則ベクトル束の研究において，複素フィンスラー計量は，エルミート計量よりも本質的な研究手段であるといえる.

研究代表者は，この事実に着目して，閉リーマン面から複素フィンスラー計量をもつ複素多様体への写像に対して，適切なエネルギー汎関数を構成し，その臨界写像として「調和写像」を定義した.

複素多様体の研究において，実１次元の可微分曲線である測地線を用いた考察のみでは不十分であり，１９８０年代に複素１次元の正則曲線である複素測地線を用いる研究が提唱されたが，一般に複素測地線の存在を判定することは容易ではない．上記の調和写像は，この複素測地線を変分問題の立場から一般化したもので，より緩い条件で存在が保証されると期待される.

一方，２０世紀において共形構造に関する中心的研究課題であった「山辺の問題」は，１９９０年代後半に次のように拡張された．すなわち，リーマン曲率テンソルの共形変形で不変でない部分が，スカウテンテンソルで生成されることに着目し，スカウテンテンソルの固有値の基本対称式の値が定数となるリーマン計量を，リーマン計量の各共形類において求める問題へと一般化された.

研究代表者は，コンパクトで滑らかな多様体上のリーマン計量のなす空間に対して，スカウテンテンソルの正規化された２乗可積分ノルムが定義する汎関数（スカウテン汎関数）の第１変分をもとめ，とくに定スカラー曲率をもつ共形平坦なリーマン計量がこの汎関数の臨界点となる場合について調べていた.

その研究の過程で，フィンスラー多様体への調和写像や，スカウテン汎関数および一般化された山辺問題の研究を，高次の幾何構造に付随して定義された変分問題の研究と捉え，それぞれの幾何構造に対して定まる標準接続とその曲率から定義される不変量に着目して，統合的に解析することが可能であり，かつ有効であると確信するに至った.

２．研究の目的

本研究の目的は，フィンスラー計量や共形構造など，本質的に高階の接束上で定式化される幾何構造に付随して定義される変分問題を，それぞれの幾何構造が内包する標準接続とその曲率から定義される幾何学的不変量に着目して，多面的かつ総合的に研究することである.

その第一段階として，本研究課題ではとくに

（１） 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への調和写像の存在と諸相
（２） 全 Q 曲率汎関数の臨界点の特徴づけ

の問題の解明を中心に，研究を行った.

３．研究の方法

上記の研究課題に対する研究は，問題（１）の複素フィンスラー多様体への調和写像の研究については，東京理科大学の立川篤教授の協力のもとに定期的にセミナーを開き，研究を進めた.

とくに，下記の研究成果の③の部分は，汎関数の最小解の研究に詳しい立川教授との共同研究として得られたものである.

また，研究成果の①および②の部分については，エネルギー汎関数の第一変分や第二変分の計算の検証に際して，複素フィンスラー幾何の専門家である鹿児島大学の愛甲正教授の協力を得た.

さらに，研究成果を公開するとともに，関連する分野の最新結果に関する情報交換を促進するため，国際研究集会「Workshop on Geometric Analysis, Sendai 2011」を，２０１１年に開催した.

問題（２）の全 Q 曲率汎関数の研究については，日本にこの分野の研究者が少ないので，まず２００９年に，共形不変な微分作用素と Q 曲率に関する研究の基礎から最新の結果までを概観する研究集会「Workshop on Q-curvature in Conformal Geometry」を，仏国・ブレスト大学の Ali Fardoun 教授および Rachid Regbaoui 教授の協力の下に開催した.

その後，この両教授と山形大学の上野慶介講師と共同で研究を進め，下記の研究成果を得た．

以上の問題と関連する研究課題として，２次元球面の接束上のリーマン計量に関して，仏国・ブレスト大学の Eric Loubeau 教授と共同研究を行い，またスカウテン汎関数の変分問題に関しては，ベルリン工科大学の Udo Simon 教授と共同研究を行った．

これら本研究課題で行った研究を総括し，今後の研究を展望するため，研究最終年度の２０１１年に国際研究集会「Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis」を開催した．

４．研究成果

研究目的に挙げた問題（１）に関して，以下の成果を得た．

① 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への写像に対して，コーシー・リーマン作用素を用いて適切なエネルギー汎関数を定義し，その第一変分と第二変分を決定した．

② 上記のエネルギー汎関数の臨界点として調和写像を定義し，その基本的性質を調べた．また，第二変分公式を用いて，リーマン球面から正曲率をもつ弱ケーラー・フィンスラー多様体へのエネルギー最小な調和写像は，正則あるいは反正則写像に限ることを証明した．

③ 上記のエネルギー汎関数は、ディリクレ積分の一般化として定義されるエネルギー汎関数とは一致しないため，汎関数として通常の意味での凸性をもたない．

この難点に対して，このエネルギー汎関数を実表示することにより，値域の複素フィンスラー計量がケーラー条件をみたす場合に，この二つの汎関数の臨界点は一致することを証明した．これにより，臨界点となる調和写像に対して，通常の方法でアプリオリ評価をえることができることが分かった．

④ 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への写像に対して，閉リーマン面上の２次微分が定義される．あたえられた写像が調和写像であるとき，２次微分は正則２次微分となることを証明した．この結果により，正則写像でない調和写像の特異集合（コーシー・リーマン作用素の零点となる集合）が有限集合となることが導かれる．

また，問題（２）に関しては，次の成果を得た．

① コンパクトで滑らかな多様体上の全 Q 曲率の変分問題を，とくにリーマン計量の共形変形のもとで研究し，４次元の場合を除き，体積を保つ共形変形のもとで全 Q 曲率の臨界点となる計量は，全 Q 曲率が定数となるものに限ることを証明した．

② 体積を保つ共形変形のもとで，正のスカラー曲率をもつアインシュタイン計量は，全 Q 曲率の安定な臨界点となる，すなわちこのような変形のもとで全Q 曲率の第２変分は非負となることを証明した．

関連する研究課題として研究した，２次元球面の接束上のリーマン計量に対しては，次の成果を得た．

２次元球面の単位接束は接束の部分多様体として実現されるが，接束上のリーマン計量の族で，この部分多様体上に正定曲率計量を誘導し，ホップ写像が２次元球面の単位接束の普遍被覆多様体である３次元球面から２次元球面へのリーマンしずめこみとして実現されるものが，自然な方法で構成できることを証明した．

さらに，同様の結果が２次元双曲平面の接束上のリーマン計量に対しても成り立つことを証明した．

また，スカウテン汎関数の臨界点の研究に対しては，共形平坦なリーマン計量の中で，定曲率計量がスカウテン汎関数の臨界点として特徴づけられることを証明した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Michel Benyounes, Eric Loubeau and Seiki Nishikawa, Generalized Cheeger-Gromoll metrics and the Hopf map, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 29 巻, 2011, pp. 555-566, DOI:10.1016/j.difgeo.2011.04.037

② Zejun Hu, Seiki Nishikawa and Udo Simon, Critical metrics of the Schouten functional, Journal of Geometry, 査読有, 98 巻, 2010, pp. 91-113 DOI:10.1007/s00022-010-0057-8

〔学会発表〕（計１４件）

① Seiki Nishikawa, Harmonic maps from Riemann surfaces into complex Finsler manifolds, The 46th Symposium on Finsler Geometry, 2011 年 11 月 20 日, 静岡・マイホテル竜宮

② Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan, 2010 年 9 月 5 日, 中

国・西北大学
③ Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 5th Pacific Rim Conference on Mathematics, 2010年7月2日, 米国・スタンフォード大学
④ Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 44th Symposium on Finsler Geometry, 2009年9月11日, 札幌・東海大学
⑤ Seiki Nishikawa, Projective complex curves and projectively flat complex Finsler manifolds, International Conference on Perspectives in Geometric Analysis, 2008年10月27日, 中国・北京大学
⑥ Seiki Nishikawa, Geometry of projective complex curves, Conference on Conformal Geometry; invariant theory and the variational methods, 2008年7月1日, 仏国・CNRSロスコフ生物学研究所

〔図書〕(計１件)
① Seiki Nishikawa, Harmonic maps of Finsler manifolds, Topics in Differential Geometry, Edutura Academiei Romane, 2008, pp. 207-247

６．研究組織
(1)研究代表者
西川　青季 (NISHIKAWA SEIKI)
東北大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60004488

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：