

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2013

課題番号：20340011

研究課題名(和文) 原始形式に付随する導来圏と無限次元代数

研究課題名(英文) Derive categories and infinite dimensional Lie algebras associated with primitive forms

研究代表者

齋藤 恭司 (Saito, Kyoji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任教授

研究者番号：20012445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,600,000円、(間接経費) 4,380,000円

研究成果の概要(和文)：本研究計画の目的は A. 原始形式 B. 不連続群に対する極限関数の解明であった。
 A. 原始形式の圏論的構成に向けては 1. 楕円リー環の最高次可積分表現論を構成し、2. 楕円型や14個の例外型特異点の行列分解圏の例外生成系を決定した(高橋、梶浦、小田との共同研究)。一方、無限個の特異点に対するA型とD型の原始形式の構成を開始した。
 B. 群に対する分配関数の理論を一般の被約可能なモノイドにまで一般化した。その結果、モノイドの増大関数の研究が大きく進み、増大関数の逆転公式をモノイドのレベルで構成した。特に整係数正方行列のモノイドはArtinモノイドとの強いつながりを示している。

研究成果の概要(英文)：The purpose of the program is the study is A. primitive forms, and B. thermodynamical limit functions for discrete groups.

A. Towards categorical construction of primitive forms, 1. we constructed the highest weight integrable representations of elliptic Lie algebras, and 2. we determine the strongly exceptional collections of the categories of matrix factorizations for simply elliptic and 14 exceptional unimodular singularities (joint work with Takahashi, Kajiuura and Oda). On the other hand, We started the construction of primitive forms for the function of type A and D with infinite critical points.

B. We generalized the theory of the thermodynamical limit functions for a discrete group to any cancellative monoid. Then, the study of growth functions for cancellative monoids had big progress, and the inversion formula of the growth function is constructed in the monoid level. In particular, the monoid of integral square matrices shows a strong similarity with Artin monoids.

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学、幾何学

キーワード：原始形式 三角圏 無限次元リー環 周期写像 行列分解 熱力学的極限関数 モノイドの増大関数 逆転公式

1. 研究開始当初の背景

当初、当研究計画は課題として A. 原始形式、B. 不連続群に対する分配関数の解明を掲げた。その背景は次の通りである。

A. 元々原始形式は第一種楕円関分高次元一般化として、純粋に複素幾何学的な興味により申請者により導入された。しかし原始形式が、物理学の Landau-Ginzburg 理論の B-model 側を記述していると認識されるに及んで、その適用する範囲が大幅に広がると共に問題意識に分配関数を求めると言う興味が加わった。

A1 特に原始形式による平坦構造の母関数が鏡像対称側（即ちシンプレクティック幾何側）の分配関数と一致すると目される。すると Kontsevich による homological mirror symmetry の立場から考えると原始型式を複素幾何とは限らない一般の圏論の言葉で記述することが求められ、また将来的にはそれが鏡像対称性を証明することにつながると期待される。

A2. 原始形式の適用範囲の拡大例として KP-hierarchy、KdV-hierarchy を説明する超越関数に対する原始形式が有ると考えられるに至り、その解明が課題として浮上した。

A3. 原始型式の周期写像の研究にディスクリミナント補集合の（高次）ホトピーの解明が重要である。研究開始当初では Brieskorn-Saito の Artin 群論と Deligne による ADE の場合の $K(\mathbb{Z}\pi, 1)$ の研究のみが知られていた。

B. 元々タイヒミュラー空間上の関数を曲面の基本群を用いて構成するために、不連続群に対する分配関数を申請者は研究していた。

B.1 元来のタイヒミュラー空間上の関数という意味では、サーフェス群に対する、ポアンカレ双対性を適用することにより、Ising model における Kramers-Wannier duality や star-triangle-relation に対応する方程式を書き下したい。

B2. 上記の A3. の研究の影響でこれまでの、群に対する理論をモノイドに対する理論まで自然に拡張できるという認識にいたった。その結果一挙に理論の適用範囲が広がるのみでなく、その本姓がむしろモノイドにあるというと言う現象を解明する課題が浮上した。

B3. 上記の B1. と A3. の観点を結びつけることにより Artin monoid や種々のモノイドの増大関数とその分母公式の（原点に近い）ゼロ点が重要な焦点となってきた。

2. 研究の目的

当研究計画の目的は次の二点である。

- A. 原始型式とその周期写像の解明
- B. 不連続モノイドに対する分配関数の解明

3. 研究の方法

A1. 原始形式を圏論的に構成する方法として：i) 圏の構成、ii) 圏からホール代数などを通してリー代数や頂点作用素代数の構成、または、圏の Hochschild homology の構成、iii) その上の半無限ホッジ構造、高次剰余理論を構成、iv) 原始形式の構成、など種々なアプローチが考えられる [10][12].

i) については、行列分解の圏を調べる方向が考えられる。ii) については Ringel-Hall construction を一般化する研究が多く研究者により進められているので、それらをよく検討して、当研究課題と自然にあう理論を見つきたい。iii) に関しては古典的カッツ・ムーディーリー環を超える、新しい無限次元リー環や群を構成して、その随伴商写像を考える。半無限ホッジ構造を考えるには、随伴商写像に対する相対ドラムコホモロジーを考える方向と圏の Hochschild homology を直接考える方向とが考えられる。両者を比較することは、興味ある課題である。いずれの場合も高次剰余の理論の建設が基本と思われる。その点について扱うのは、当研究費では時期尚早であろう。

A2. KP-hierarchy、KdV-hierarchy を説明するある種超越関数に対する原始形式は無限次元の変形空間上に建設されるべきものでありそのままでは従来知られている、複素幾何の方法は適用できない。考えられる方法は、ヒルベルト空間を用いたスペクトル分解の方法と、無限次元変形パラメータを用いないでも記述が可能な、good section の理論を用いる方法である。

A3. まずは伝統的ホトピー論により楕円型の場合を含む場合についての基本群を考察する。しかし、将来的には高次のホトピー論取り込む方法を考える。

B1. 伝統的平方 Ising 模型の場合の Duality 理論をモデルにしながら計算を進めたい。その場合、各辺にボルツマンウェイトを付随させる代わりにケイレイグラフの有限部分グラフで生成される位相ホップ代数を考える。

B2. 伝統的平方 Ising 模型の場合でもモノイドの場合は重要であった。その手法を抽象化することにより平均自由エネルギーの理論を建設する。

B3. 従来モノイドの増大関数は殆ど研究されていないが、形式的には群に対する理論とほぼ並行に建設できる。しかし群でないことよりむしろ逆転公式の方が重要になる。

4. 研究成果

以下、当科研費により支援された研究成果について概要を列挙する。

A. 原始形式について。

A1. 圏論的に原始型式を構成する課題 (論文 [10, 12]、講演 [8, 9, 31, 34, 36])

14 個の例外型ユニモジュラー特異点の行列分解導来圏の強例外生成系の発見 (高橋、梶浦との共同研究論文 [11]、講演 [28])。

群作用付き楕円特異点の行列分解導来圏の強例外生成系の発見 (小田、高橋との共同研究 未公表、講演 [1])

楕円及びカスプ型のリー環の最高次可積分表現をドミナントインテグラルウェイトからの決定、それらの可積分表現を用いて楕円リー群とそのポレル部分群の理論の建設 (論文未発表、講演 [7, 11, 12, 14, 23, 33])

A2. 消滅サイクルのなすクウィバーが、丁度 $A_{\frac{1}{2}\infty}$ 型及び $D_{\frac{1}{2}\infty}$ 型となる超越関数の発見した。それに対する原始型式と等価なデータである good section を決定する必要がある。その為の基本データである指数の決定を行った (論文 [5]、講演 [4, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27])

A3. 自由因子の補集合の基本群を Zariski-van Kampen 法により決定し、その組早生群論的考察を行った。常に基本元が存在する (石部との共著論文 [7]、講演 [6, 16])

B1. Teichmueller modular 関数 (仮名) の研究は行わなかった (講演 [35])

B2. 不連続群に対する分配関数の理論をモノイドに対する理論への書き換えに成功した (論文 [6]、講演 [3, 18, 22, 32])

B3. Artin モノイドを含む一連のモノイドに対する増大関数ノ決定とその分母のゼロ点集合の構造の考察 (論文 [8, 9]、講演 [30])

一般の増大関数に対する収束半径の円周上における極の分布や位数の分析、(論文 [2]、講演 [13])

キャンセラティブ・モノイドの増大関数に対する一般逆転公式 (論文 [4]、講演 [5])

特に整数係数正方行列のモノイドの場合のアルティンモノイドとの関係及び逆転公式のゼータ関数表示、(論文 [1]、講演 [2])

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

1. Kyoji Saito, The skew-growth functions for the monoid of square matrices, Journal of Algebra, (2013), 査読有

2. Kyoji Saito, Opposite power series, European J. Combin., 33, 1653-1671, (2012), 査読有, 10.1013/j.ejc.2013.03.024

3. Kyoji Saito, Coxeter elements for vanishing cycles of types $A_{\frac{1}{2}\infty}$ and $D_{\frac{1}{2}\infty}$, Ann. Inst. Fourier, 61.7, 2959-2984, (2012), 査読有, 10.5802/aif.2799

4. Kyoji Saito, Inversion formula for the growth function of a cancellative monoid, Journal of Algebra, 385, 314-332 (2013), 査読有, 10.1016/j.jalgebra.2013.01037

5. Kyoji Saito: "Coxeter transformation of type $A_{\frac{1}{2}\infty}$ and $D_{\frac{1}{2}\infty}$ ", Annales de l'Institut Fourier Vol.62. (2012), 査読有

6. Kyoji Saito: "Limit elements in the Configuration Algebra for a Cancellative Monoids" Publ. RIMS 46. 37-113 (2010), 査読有

7. Kyoji Saito, T. Ishibe: "Monoids in the fundamental group of the complement of logarithmic free divisors in C^3 ", Journal of Algebra, 査読有

8. Kyoji Saito: "Growth functions Artin monoids", Proc. of the Japan Acad. 2009 85. 84-88 (2009), 査読有,

9. Kyoji Saito: "Growth functions associated with Artin monoids of finite type" Proc. of the Japan Acad. Ser. A 84. 179-183 (2008), 査読有,

10. Kyoji Saito and A. Takahashi: "From Primitive Forms to Frobenius Manifolds", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 78. 31-48 (2008), 査読有

11. Kyoji Saito, H. Kajiuura and A. Takahashi: "Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with $\epsilon = -1$ ", Adv. in Math 220. 1602-1654 (2009), 査読有

12. Kyoji Saito: "Towards categorical construction of Lie algebra" Advanced Studies in Pure Mathematics 50. 101-176 (2008), 査読有

[学会発表](計36件)

1. Kyoji Saito, Matrix factorization for simply elliptic singularities, (20130316). Vienna, Austria. (招待講演)
2. Kyoji Saito, Algebraic geometry and related topics, Monoids and zeta functions, 2012年08月06日~2012年08月08日, Hokkaido-uiversity, Sapporo, (招待講演)
3. Kyoji Saito, Thermo-dynamical limit function associated with cancellative monoids, Workshop on mathematics and physics, 2012年09月26日, Steklov institute, Moscow, ロシア. (招待講演)
4. Kyoji Saito, Primitive forms of type $A_{\frac{1}{2}\infty}$ and $D_{\frac{1}{2}\infty}$, Singularity Theory, 2012年09月12日, Oberwolfach Institute, ドイツ. (招待講演)
5. Kyoji Saito: "Inversion formula for growth functions of cancellative monoids", Get together seminar at IPMU. (20120412). IPMU, Tokyo, Japan. (招待講演)
6. Kyoji Saito: "Primitive vector fields, flat (Frobenius) structure and topology" Extended Root Systems and Fundamental Groups, (20120214). Workshop IPMU, Japan. (招待講演)
7. Kyoji Saito: "Extended root systems and associated Lie Algebras" Extended Root Systems and Fundamental Groups, (20120213). Workshop IPMU, Japan. (招待講演)
8. Kyoji Saito: "On primitive forms and associated period maps", 特別講演(幾何学), 日本数学会 2012年度年会. (20120328). Tokyo, Japan. (招待講演)
9. Kyoji Saito: "Flat coordinates, primitive forms and Frobenius manifolds", 企画特別講演, 日本数学会 2011年度秋期総合分科会. (20111001). Matsumoto, Japan. (招待講演)
10. Kyoji Saito: "Moduli spaces and Modular forms, (20111010-14) Luminy, France (招待講演)

11. Kyoji Saito: "Highest weight representation for elliptic and cuspidal Lie algebras", The 6th Franco-Japanese Symposium on Singularities (FJ2011, Fukuoka). (20110909). Kyushu uni., Fukuoka, Japan. (招待講演)

12. Kyoji Saito: "Highest weight representation of elliptic and cuspidal Lie algebras", 特異点論とその広がり. (20110824). Kyoto uni., Kyoto, Japan. (招待講演)

13. Kyoji Saito: "Opposite sequences" Oki-seminar, (20110822). Oki, Japan. (招待講演)

14. Kyoji Saito: "Highest weight representation of elliptic and cuspidal Lie algebras", Hyperplane arrangements and applications. (00000800). British Columbia university, Vancouver, Canada. (招待講演)

15. Kyoji Saito: "Vanishing cycles of type $A_{\frac{1}{2}\infty}$ and $D_{\frac{1}{2}\infty}$ ", Seminar on complex analysis. (20110627). Komaba, the university of Tokyo, Japan. (招待講演)

16. Kyoji Saito: "Polyhedra dual to the Coxeter arrangement", Workshop on Free Divisors. (20110603). Warwick uni., England. (招待講演)

17. Kyoji Saito: "Reflection groups of types $A_{1/2}$ and $D_{1/2}$ ", Lattices, Reflection groups and Algebraic Geometry. (20101126). Nagoya university, Japan. (招待講演)

18. Kyoji Saito: "F-functions associated with cancellative monoids" Long term workshop Geometry and Analysis. (20110307). Kyoto university, Kyoto, Japan. (招待講演)

19. Kyoji Saito: "The lattice of vanishing cycles of type $A_{1/2}$ and $D_{1/2}$ " Conference on Derived Category. (20110126). The university of Tokyo, Japan. (招待講演)

20. Kyoji Saito: "Spectral decomposition of the Coxeter elements of type $A_{1/2}$ and $D_{1/2}$ " Japan-Vietnam bilateral program. (20110105). Tohoku univ., Sendai, Japan. (招待講演)

21. Kyoji Saito: "Singularities of the transcendental functions of type $A_{1/2}$

and D1/2 " RIMS conference on real singularities. (20101101). RIMS, Kyoto, Japan. (招待講演)

22. Kyoji Saito: "Limit partition functions associated with cancellative monoids" Kinoshita symposium of algebraic geometry. (20101025). Kinoshita, Japan. (招待講演)

23. Kyoji Saito: "Highest weight representations of Elliptic Lie Algebras" 4<th> International Conference on Representation Theory. (20100813). Xian, China. (招待講演)

24. Kyoji Saito: "Primitive forms of type A1/2 and D1/2 " Conference on Groth-Witten invariants. (20100604). Grenoble, France. (招待講演)

25. Kyoji Saito: "The lattice of vanishing cycles of types A1/2 and D1/2 " Conference in honor of C. Ringel and K. Saito. (20100505). Beijing, China. (招待講演)

26. Kyoji Saito: " Period maps for functions with infinitely many critical points ", (200912-19-1221) Gifu, Japan (招待講演)

27. Kyoji Saito: "Towards primitive forms of type A_{∞} and D_{∞} " 城崎代数幾何学シンポジウム. (20091026). Kinoshita, Japan (招待講演)

28. Kyoji Saito: " Categorical construction of Lie algebras ", Arrangements of Hyperplanes (Conference in honor of Terao) (200907-0806) Sapporo, Japan (招待講演)

29. Kyoji Saito: , Conference in honor of Le Dung Trang (20090125-0201) Sevilla, Spain (招待講演)

30. Kyoji Saito: " Growth functions for Artin monoids ", Japan-Vietnam bilateral program (20081221-27) Dalat, Vietnam (招待講演)

31. Kyoji Saito: " Higher residue pairings ", (20081203-06) Hakodate, Japan (招待講演)

32. Kyoji Saito: " Thermodynamical limit functions for cancellative monoids ", memorial conference for Flatto Mosche

(20081121-30) Benglion, Israel (招待講演)

33. Kyoji Saito: " Highest weight integrable representations of elliptic algebras ", (20080830-31) Kyoto Japan (招待講演)

34. Kyoji Saito: " Categorical construction of Lie algebras ", Spectral Methods in Representation Theory of Algebras and Applications to the Study of Rings of Singularities (20080907-14) BIRS Canada (招待講演)

35. Kyoji Saito: " Duality of limit functions for discrete groups. " (20080709). Colloquium, Kobe, Japan. (招待講演)

36. Kyoji Saito: " Matrix factorization of unimodular singularities ", Matrix factorizations in mathematics and physics (20080508-18) BIRS, Canada (招待講演)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://indico.ipmu.jp/indico/conferenceDisplay.py?confId=30>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

斎藤恭司 (SAITO, Kyoji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任教授

研究者番号：20012445

(2) 研究分担者

河野俊丈 (KONO, Toshi take)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80144111

神保道夫 (JIMBO, Michio)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80109082

柏原正樹 (Kashiwara, Masaki)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：60027381

高橋篤史 (TAKAHASHI, Atsushi)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：50314290