

## 自己評価報告書

平成23年 4月15日現在

機関番号：14501  
 研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2008～2011  
 課題番号：20340012  
 研究課題名 (和文) 可積分系と保存量と変換の方法による特別な性質をもつ曲面の漸近挙動の研究  
 研究課題名 (英文) Study of asymptotics of surfaces using integrable systems, conserved quantities and transformation theory  
 研究代表者 W.F. ラスマン (W.F. Rossman)  
 神戸大学・理学研究科・教授  
 研究者番号：50284485

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：曲面理論

キーワード：constant mean curvature surfaces, flat surfaces, linear Weingarten surfaces, 3-dimensional space forms, Moebius geometry, Lie sphere geometry, Weierstrass type representations, asymptotics of surfaces,

### 1. 研究計画の概要

我々の研究の目的は以下のとおりである。

- 1) 特別な性質をもつ曲面の特異点と漸近挙動を調べる。
- 2) 曲面理論の微分幾何学的性質をもつような離散化をより深く理解する。

研究方法に関して、上記の二つの研究目的のそれぞれについて代表者、分担者および連携研究者がそれぞれの研究を行うとともに、得られた成果の相互理解を図るために、セミナーや研究連絡を行う。適宜、国外の研究者とも連携し研究を推進する。

### 2. 研究の進捗状況

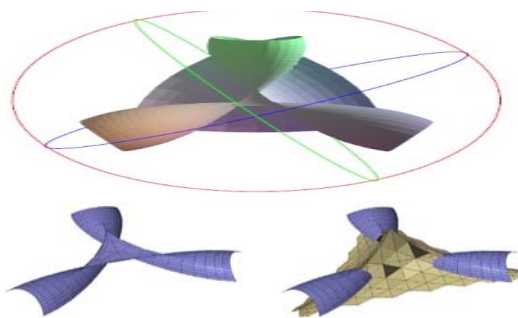
ユークリッド空間内の曲面を微分幾何学的なアプローチで離散化するのではなく、この科研費で研究しているのは、別の ambient 空間 (双曲空間、球面空間、ミンコフスキー空間、ド・ジッター空間等) 内の滑らかな曲面の理解を深め離散的な曲面を微分幾何学的なアプローチで研究することである。後述のような結果を得ており、現在も研究は進行中である。

### 3. 現在までの達成度

②概ね、順調に進展している。

この研究により今までに得られた主な結果は以下の通り。

Tim Hoffmann氏と佐々木武氏と吉田正章氏の協力を得て、双曲空間内の離散的な平坦曲面の定義を与えた。その定義に関して、事前に定義された双曲空間内の離散的な平均曲率1を持つ曲面との正しい関係があることを確認した。その上、平坦曲面だけではなく、linear Weingarten曲面も離散化できることを発見した。以下に例をあげておく。



可積分系的な保存量に着目するアプローチにより離散的な平均曲率一定曲面が定義できた。これまでは、ambient空間によっては、そのような曲面は考えられなかったが、保存量を用いることで可能になった。この定義により、ambient空間はユークリッド空間でも球面空間でも双曲空間でも良い。そして、平均曲率 $H$ は任意の実数の定数をとれる。Fran Burstall氏とUdo Hertrich-Jeromin氏とSusana Santos氏との共同研究である。

リー球面幾何学の立場から双曲空間内の滑らかな平坦曲面を研究した。保存量をもつ曲面の研究を続けて、双曲空間内の平坦曲面を考える。この場合にリー球面幾何学も重要な役割を果たした。この研究は、Tim Hoffmann氏と佐々木武氏と吉田正章氏との共同研究における双曲空間内の離散的な平坦曲面とlinear Weingarten曲面の研究と関係がある。Fran Burstall氏とUdo Hertrich Jeromin氏の協力を得て、リー球面幾何学のアプローチで双曲空間内の平坦曲面を調べるために、曲面のクラスを $\Omega$ 曲面のすべてに広げたほうが良いことがわかってきた。

Ambient空間がpositive definiteではない場合にも、離散的な平均曲率一定曲面の定義と結果を調べた。特に、ambient空間がミンコフスキー空間の場合を調べた。神戸大学の院生の木ノ下祐輔氏の協力を得て、3次元ミンコフスキー空間内の離散的な空間的平均曲率一定曲面の定義を見つけた。そして、ユークリッド空間内の離散的な平均曲率一定曲面について、1位の保存量によって定義されている離散的なガウス写像が、一般的には、離散的な調和写像にならないことを証明した。

梅原雅顕氏、山田光太郎氏、國分雅敏氏、S. D. Yang氏、藤森祥一氏との共同研究として、Weierstrass表現の立場から、双曲空間内の平坦曲面とド・ジッター空間の平均曲率一定曲面の特異点と完備性とエンドの漸近挙動についての結果を得た。

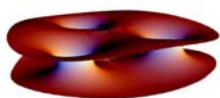
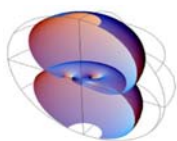
David Brander氏とNicholas Schmitt氏との共同研究として、3次元ミンコフスキー空間内の空間的な平均曲率一定曲面の可積分系的な表現を発見した。その表現を使って、新しい例を得た。

Martin Guest氏とJoseph Dorfmeister氏との共同研究として、Minkowski空間内の空間的な平均曲率一定曲面とquantum cohomologyの関係を研究した。その結果、その2つの分野を結びつけるような特殊な平均曲率一定曲面を得た。

國分雅敏氏と梅原氏と山田氏の協力を得て、双曲空間内の三本目の論文を書いた。この論文ではpitchという概念を用いて、その曲面のエンドの性質を調べた。エンドが漸近的にcycloidの形になることを証明した。

Magdalena Toda氏の協力を得て、ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面と双曲空間内の平均曲率一定曲面の関係を調べた。その二つの曲面のタイプにはLawson対応が存在するが、DPWの方法で作られている場合には、双曲空間内の曲面がもともとのユークリッド空間内の曲面に対応するのではなく、ユークリッド空間内の曲面の双対曲面に対応することを証明した。

藤森氏の協力を得て、双曲空間内の二つのエンドを持つ平均曲率一定曲面の例を構成した。この例は任意の種数を持つ。また、3次元ド・ジッター空間の場合にも、そのような例を構成した。ド・ジッター空間の場合は、エンドが楕円型にも双曲型にもなり得ることを証明した。以下に例をあげておく。



#### 4. 今後の研究の推進方策

リー球面幾何学のアプローチにより、一般のlinear Weingarten surface という曲面のクラスは二つの0位の保存量を持つOmega曲面というクラスに1対1に対応していることをイギリスのバース大学のUdo Hertrich-Jeromin氏とFran Burstall氏の協力を得て、証明した。この研究によって得られた重要な結果は、一般のOmega surfaceや一般のlinear Weingarten surfaceも両方とも離散化しかたが明確になったことである。その離散化が以後に残された重要な課題である。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件) (その他10件)

- (1) F. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, W. Rossman, Lie geometry of flat fronts in hyperbolic space, *Comptes rendus - Mathematique Ser 1* 348 (2010), 661-664. 査読有
- (2) J. Dorfmeister, M. Guest, W. Rossman, The  $tt^*$  structure of the quantum cohomology of  $CP^1$  from the viewpoint of differential geometry, *Asian J. Math.* 14(3) (2010), 417-437. 査読有
- (3) S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, S-D. Yang, K. Yamada, Spacelike mean curvature 1 surfaces in de Sitter 3-space, *Comm. Anal. Geom.* 17 (2009), 383-427. 査読有
- (4) M. Kilian, W. Rossman, N. Schmitt, Delaunay ends of constant mean curvature surfaces, *Compositio Math.* 144 (2008), 186-220. 査読有

[学会発表] (計3件) (その他16件)

- (1) 2011年2月10日, "Surfaces with Weierstrass representations and Lie sphere geometry", geometry seminar, King's College, England.
- (2) 2010年3月21日, "Conserved quantities in surface theory", TIMS-OCAMI joint workshop on differential geometry, National Taiwan University.
- (3) 2009年7月16日, "Discrete isothermic surfaces, and applications to architecture", Discrete differential geometry miniworkshop, Technical University of Denmark.

[その他]

ホームページ等

<http://math.kobe-u.ac.jp/home-j/wayne.html>