

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月18日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20340015

研究課題名（和文） 最適異時点間リスク配分とそのファイナンスおよび保険への応用

研究課題名（英文） Optimal intertemporal risk allocation with applications to finance and insurance

研究代表者

井上 昭彦（INOUE AKIHIKO）

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50168431

研究成果の概要（和文）：井上、中野及び福田は、最適異時点間リスク配分に関する種々の結果を得た。指数効用の場合には、得られる価格原理が動的リスク尺度として時間一貫性を持つことを見出した。井上は最適異時点間リスク配分に対する均衡を導入し、ビュールマンとエッシャー原理をこの場合に拡張した。井上と笠原は、それまで1次元のみにおいて展開されていた動的従属構造の解析のための予測理論的手法を、多次元に拡張した。すなわち、最も基本的な離散時間過程に対し、1次元の場合の種々の結果を多次元に拡張した。

研究成果の概要（英文）：Inoue, Nakano and Fukuda obtained various results on the intertemporal risk allocation. In the case of exponential utility, they found that the premium principle thus obtained becomes time-consistent when viewed as a dynamic risk measure. Inoue introduced the equilibrium for the intertemporal risk allocation, and extended the Buhlmann and Esscher principles to this case. Inoue and Kasahara extended the prediction-theoretic method for the analysis of dynamic dependence structure, which had been developed only in the one-dimensional case, to the multivariate case. More precisely, they took the fundamental case of discrete-time processes, and extended various results in the one-dimensional case to the multivariate case.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2009年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2010年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2011年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
総計	11,200,000	3,360,000	14,560,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論、確率過程、記憶、予測理論、数理ファイナンス、リスク

1. 研究開始当初の背景

金融や保険の分野において、リスク評価は異なる時間と異なるファクターを勘案して本来なされるべきものである。実際、これに関する手法は、すでに様々なものが開発されているが、しかし、それでも、完全に満足

く状況にあるとは、言いがたかった。一方、代表者は、長期記憶定常時系列の偏相関関数の挙動を求めるという動機で、有限予測誤差に対する表現定理を示していた。これが、有限の過去からの予測に付随する量の明示表現というタイプの定理の、最初のもので

ある。代表者の井上は、分担者の笠原雪夫氏等と共に、離散時間過程および連続時間過程に対し、上記タイプの表現定理とその応用を発展させ、予測係数と偏相関関数の表現定理及び漸近挙動、長期記憶モデルに対する Baxter の不等式、分数冪ブラウン運動型確率過程に対する予測公式、新生過程の明示表現等の種々の成果を得た。また、この成果を証券価格過程のモデリングとその解析に応用した。

この非マルコフ型市場モデル等で用いられる研究代表者および分担者の笠原等による予測理論的なフィルタリングの手法は、本質的に1次元の場合のみ適用可能であった。これを多次元に拡張する試みは、すでに研究代表者、笠原及び M. Pourahmadi により、2005年頃より行われていたが、成果らしい成果は何も得られていなかった。多次元の場合の困難の理由の一つとして、AR・MA 係数や相関数の Fourier 係数が、1次元ではスカラーで従って可換であるのに対し、多次元では行列で非可換になってしまうことが挙げられる。この非可換性により、1次元の場合の議論を直接拡張するというやり方では、直ちに困難に直面するのである。もう一つの困難としては、スペクトル密度行列を分解する外関数行列に対する表現定理が、1次元の場合と異なり多次元では知られていないことが挙げられる。これらの困難により、多次元にこの予測理論的手法を拡張することは、まだ誰も成し遂げていなかった。

2. 研究の目的

本研究においては、(i) 最適異時点間リスク配分、(ii) 代表者らにすでに発展させられていた動的な従属性解析の予測理論的新手法、の二つの手法を軸に、異時点間、および multi-factor のリスクの評価および解析の手法の開発するのが目的であった。

3. 研究の方法

(i) 最適異時点間リスク配分の手法による研究については、最適な異時点間のリスク配分というマイクロ経済学的な新しいアプローチで研究を行う。また、保険型金融商品の本質的特徴が、多数の契約者のリスク・プールであることを踏まえて、個別のリスク資産の持つリスクを全体でしかも異時点間に渡り配分する状況におけるリスクの定量的評価方法とその最適配分の研究も行う。

(ii) 動的な従属性解析の手法による研究については、研究代表者らにより1次元の場合に開発されていた手法を、multi-factor リスクの場合に適用できるように拡張する研究を行う。

4. 研究成果

(i) (1) 研究代表者等は、これまで経済主体が1人で時間0における価格のみを扱って

いたものを、多期間かつ n 人の経済主体の場合に拡張してそのダイナミクスを研究し、指数効用の場合に得られる価格原理を動的リスク尺度と見るとき、いわゆる時間一貫性を持つという事実を見出した。また、指数効用以外の場合にも、双対問題の手法をこの場合の設定に拡張することにより、本研究において鍵となる最適異時点間リスク配分の存在を示した。(2) 研究代表者は、最適異時点間リスク配分の概念を用いて均衡の定義の多期間版を導入し、またポーチの均衡の特徴付けをこの場合に拡張した。これを指数効用に適用し、マルチンゲールに関するある興味深い結果を用いることにより、この場合には均衡が明示的に求められことを示した。それはビュールマンの価格原理の多期間への一つの拡張と見なすことができる。また、ビュールマンの独立性に関する条件と同様の条件を課すことにより、エッシャー原理の多期間への一つの拡張を導いた。さらに、これを保険商品に適用し、その価格を求めるアルゴリズムを導いた。

(ii) 動的従属性解析の手法の拡張に関しては、非常に大きな成果が得られた。我々、井上・笠原・Pourahmadi よりなる研究グループは、井上・笠原等により発展させられてきたこの予測理論的手法の多次元への拡張に関するブレークスルーを成し遂げた。以下は、この3人の共同研究成果の成果である。

成功の鍵となったのは、これまでと異なる新しいタイプの交互射影定理である。この交互射影定理は、行列の非可換性に関する困難を解消してくれた。3人は、雛形のモデルである離散時間の過程に対して、この交互射影定理に基づく方法を適用することにより、これまで1次元において代表者の井上や分担者の笠原により発展させられてきた予測理論的手法による動的従属性の新しい解析の手法を多次元に拡張することに成功した。すなわち、まず、有限予測係数と Verblunsky 係数の、相関数の Fourier 係数による表現定理を示すことに成功した。この表現定理は、完全非決定的という非常に弱い条件の下で示すことができた。

我々は、これらの結果を、vector ARFIMA 過程という長時間の記憶を持つ代表的なパラメトリックモデルに適用した。そのために、まず、vector ARFIMA 過程のスペクトル密度を分解する2つの外関数行列の間の関係を詳しく調べる必要があった。上に述べたように、多次元の場合には、1次元の場合と異なり、このような外関数行列の明示表現定理は知られていないので、この解析は多次元では一般には著しく難しい問題になる。我々は Rozanov による多次元有理スペクトル密度行列に対する結果を応用として、vector ARFIMA 過程の外関数行列に関する必要なデータを

取り出すことができた。この結果と、上にのべた有限予測係数と Verblunsky 係数の相関数の Fourier 係数による表現定理を合わせるにより、この過程の Verblunsky 係数に関する大変興味深い漸近挙動の結果と、有限予測係数に関する Baxter の不等式の類似物を示すことができた。これらの結果は、1次元の場合の井上や笠原の結果を自然に拡張する形で、多次元の場合に示したものとなっている。

尚、これらの研究において基礎となるのが、過程が完全非決定的であるための十分条件を求めるという問題である。実際、例えば、vector ARFIMA 過程に関する上の結果を得るには、この過程が完全非決定的であることを示す必要があるからである。我々3人は、これに関して、コルモゴロフの最小性という概念の多次元版が、一つの十分条件になっているという結果を得ている。これは、Dym、McKean、Helson、Masani 等により研究されてきた調和解析と予測理論の融合された分野における、一つの新しい結果とも見ることができる。解析的にも非常に深い結果であるといえる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7件)

1. A. Inoue and V. Anh, Prediction of fractional processes with long-range dependence, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, vol. 41, 2012, 掲載決定.
2. N. H. Bingham, A. Inoue and Y. Kasahara, An explicit representation of Verblunsky coefficients, Statistics & Probability Letters, 査読有, vol. 82, 2012, pp. 403-410
3. 井上 昭彦, Buhlmann の価格原理の多期間への拡張, 数理解析研究所講義録, 査読無, 1675 巻, 2010, pp. 37-41
4. Y. Kasahara, M. Pourahmadi and A. Inoue, Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values, Statistics & Probability Letters, 査読有, vol. 79, 2009, pp. 1637-1646
5. K. Iwata and T. Kolsrud, Central limit theorem for constrained Poisson systems, Bulletin des Sciences Mathematiques, 査読有, vol. 133, 2009, pp. 658-669
6. A. Inoue, Y. Kasahara and P. Phartyal, Baxter's inequality for fractional Brownian motion-type processes with Hurst index less than 1/2, Statistics & Probability Letters, 査読有, vol. 78, 2008, pp. 2889-2894

7. A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, Probability Theory and Related Fields, 査読有, vol. 140, 2008, pp. 523-551

[学会発表] (計 9件)

1. 井上昭彦・M. Pourahmadi・笠原雪夫, 予測理論における表現定理の多次元への拡張の応用, 日本数学会 2012年度年会, 2012年3月26日, 東京理科大学
2. 井上昭彦, 予測理論における表現定理の多次元への拡張, 研究集会「直交多項式・特殊関数が関わる確率論的諸問題とその周辺」, 2011年12月23日, 名古屋
3. 井上昭彦・M. Pourahmadi・笠原雪夫, 予測理論における表現定理の多次元への拡張, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会, 2011年9月28日, 信州大学
4. 井上 昭彦, ファイナンスと保険の数理, 日本保険・年金リスク学会 2010年度第3回研修会, 2010年12月22日, 東京
5. 笠原 雪夫, Verblunsky 係数と Nehari の問題, 日本数学会年会, 2010年3月24日, 横浜
6. 井上 昭彦, Buhlmann の価格原理の多期間への拡張, 数理解析研究所研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」, 2009年11月25日, 京都
7. 笠原 雪夫, OPUC associated with a rigid function (3), 実解析学シンポジウム 2009, 2009年10月25日, 埼玉県坂戸市
8. A. Inoue, A multi-period extension of Buhlmann's premium principle, Workshop on Mathematical Finance and Related Topics in Economics and Engineering, 2009年8月14日, 京都
9. A. Inoue, Dynamics of Indifference Prices Derived from Optimal Intertemporal Risk Allocations, Department of Statistics Colloquium Series, 2009年2月12日, Texas A&M University, U. S. A.

[その他]

ホームページ等

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井上 昭彦 (INOUE AKIHIKO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50168431

(2) 研究分担者

岩田 耕一郎 (IWATA KOICHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20241292
(H21→)

笠原 雪夫 (KASAHARA YUKIO)
北海道大学・大学院理学研究院・非常勤講師
研究者番号：10399793

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：