

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 29 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008 年度～2011 年度

課題番号：20340016

研究課題名（和文） グラフの距離構造と連結構造の研究

研究課題名（英文） A study on the distance structure and the connectivity structure of graphs

研究代表者

安藤 清（ANDO KIYOSHI）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：20096944

研究成果の概要（和文）：グラフの距離構造と連結構造に関して研究し、とくに連結構造について臨界的なグラフおよび両構造に関わるワイド直径について研究した。連結構造に関して臨界的な 5-連結グラフの次数 5 の頂点の分布を確定し、その平均次数に関して最良の評価を得ることに成功した。また、連結構造に関して臨界的な 6-連結グラフの構造に関して新しい知見を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：We studied on the distance structure and the connectivity structure of graphs. We obtained the upper bound of the number of degree 5 vertices in a 5-connected graph with critical connectivity structure. Also we found many new structural properties on 5-connected graphs and 6-connected graphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,500,000 円	750,000 円	3,250,000 円
2009 年度	1,700,000 円	510,000 円	2,210,000 円
2010 年度	1,700,000 円	510,000 円	2,210,000 円
2011 年度	1,800,000 円	540,000 円	2,340,000 円
総計	7,700,000 円	2,310,000 円	10,010,000 円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般

キーワード：離散数学、組合せ論、グラフ、連結度、直径

## 1. 研究開始当初の背景

計算機を頂点で表し、計算機が直接情報交換できるとき対応する頂点を辺で結ぶことにより、計算機ネットワークの数学的モデルとしてのグラフを得る。任意の 2 頂点を結ぶ道が存在するとき、そのグラフは連結であるという。連結グラフでその除去がグラフを非連結とする頂点の集合をそのグラフの「切断集合」と呼ぶ。最小切断集合の頂点数をそのグラフの「連結度」という。また、その除去がグラフを非連結とする辺集合を辺切断集合といい、最小辺切断集合の辺数を辺連結度という。計算機ネットワークで考えれば、切断

集合はその故障がネットワークを切断する計算機群を、また辺切断集合はその破損がネットワークを切断するケーブル群を意味するから、連結度および辺連結度はネットワークの頑強性を表すもっとも基本的なパラメータといえる。

連結グラフの 2 頂点を結ぶ最短路の辺数をその 2 頂点間の距離と呼ぶ。グラフの中の最も遠い 2 頂点間の距離をそのグラフの「直径」と呼ぶ。計算機ネットワークでは距離は 2 つの計算機の間情報伝達に要する時間の大きさに対応するから、グラフの直径はネットワークにおける情報伝達の遅れを表す基本

的なパラメータである。

グラフの連結構造と距離構造はネットワークの基本構造であり、両者の関連を調べることが求められる。

## 2. 研究の目的

グラフの連結度はグラフを非連結にする最小切断集合の頂点数である。いくつかの頂点の除去はグラフを非連結にするまでは至らなくともその距離構造に変化をもたらす。とくに連結構造に関して臨界的なグラフにおいて頂点の除去が直径の増大に与える影響を評価すること、そのために連結構造に関して臨界的なグラフの構造を調べることを目的とする。

## 3. 研究の方法

任意の辺の除去が連結度の減少をまねく  $k$ -連結グラフを極小  $k$ -連結グラフという。また、任意の辺の縮約が連結度の減少をまねく  $k$ -連結グラフを縮約臨界  $k$ -連結グラフという。極小  $k$ -連結グラフから次数  $k$  の頂点を除去したグラフは閉路を含まないという強い結果を、いわゆる十字論法を用いて Mader が示した。縮約臨界連結グラフに関してはその性質を調べるための一般的手法は開発されていない。とくに低連結度の縮約臨界連結グラフおよび極小縮約臨界連結グラフの構造を探索する手法を開発し、十字論法と組み合わせることで縮約臨界連結グラフの構造を調べる。

## 4. 研究成果

### (1) 縮約臨界 5-連結グラフの次数 5 の頂点の分布問題

縮約臨界 5-連結グラフの構造の解明に有用な「admissible な頂点」の概念を導入した。この概念を用いることで以下の補題の証明に成功した。

補題 縮約臨界 5-連結グラフの最小切断点集合  $S$  によって 2 頂点の成分が分離されるとき、2 頂点の成分の少なくとも一方の頂点の次数が 6 ならば  $S$  内には次数 5 の頂点が少なくとも 4 個存在する。

この補題を用いることにより以下の結果を得た。

#### 定理 1

縮約臨界 5-連結グラフは少なくとも頂点数の  $1/2$  の次数 5 の頂点を含む。

この評価の値  $1/2$  は最良であり、この定理によって縮約臨界 5-連結グラフの次数 5 の頂点

の分布に関する問題は解決された。

### (2) 4-連結グラフの可縮辺の分布

その辺の縮約が連結度の減少をもたらさないとき、その辺を可縮辺と呼ぶ。可縮辺を持たない 4-連結グラフはすべての頂点の次数が 4 であることが知られている。したがって 4-連結グラフに次数 5 以上の頂点があれば可縮辺が存在する。以下はその分布を評価したものである。

#### 定理 2

4-連結グラフには次数 5 以上の頂点の数の可縮辺が存在する。

また、可縮辺を持たない 4-連結グラフの任意の辺は三角形に含まれることも知られている。したがって 4-連結グラフに三角形に含まれない辺があれば可縮辺が存在する。以下はその分布を評価したものである。

#### 定理 3

4-連結グラフには三角形に含まれない辺の数の概ね  $1/4$  の可縮辺が存在する。

さらに、すべての頂点の次数が 4 の場合はその評価は以下のように改良される。

#### 定理 4

すべての頂点の次数が 4 の 4-連結グラフには三角形に含まれない辺の数の  $1/2$  の可縮辺が存在する。

定理 2、定理 3 および定理 4 の評価は最良である。

### (3) 極小縮約臨界 6-連結グラフ

縮約臨界 5-連結グラフの任意の頂点には次数 5 の頂点が少なくとも 2 個隣接していることが  $S_u$  によって示された。縮約臨界 6-連結グラフにおいても同様の命題が成立すると予想されていたがその反例を構成した。すなわち、次数 6 の頂点がひとつも隣接していないような頂点を含む縮約臨界 6-連結グラフを構成することに成功した。さらに縮約臨界ではなく極小縮約臨界ならば 5-連結グラフにおける  $S_u$  の定理類似の結果が成立することを示した。

#### 定理 5

極小縮約臨界 6-連結グラフ任意の頂点には次数 6 の頂点が少なくとも 1 個隣接している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件 すべて査読有り)

- ① Ando, Kiyoshi; Fujita, Shinya; Kawarabayashi, Ken-ichi, Minimally contraction-critically 6-connected graphs, Discrete Math. 312 (2012), 671—679
- ② Ando Kiyoshi; Chengfu, Qin, Some structural properties of minimally contraction-critically 5-connected graphs. Discrete Math. 311 (2011), no. 13, 1084--1097.
- ③ Ando, Kiyoshi; Takashi Iwase, The number of vertices of degree 5 in a contraction-critically 5-connected graphs. Discrete Math. 311 (2011), 1925--1939.
- ④ Ando, Kiyoshi, Subgraph induced by the set of degree 5 vertices in a contraction critically 5-connected graph. Discrete Math. 309 (2009), no. 22, 6359--6367.
- ⑤ Ando, Kiyoshi, A local structure theorem on 5-connected graphs. J. Graph Theory 60 (2009), no. 2, 99--129.
- ⑥ Ando, Kiyoshi; Egawa, Yoshimi; Kawarabayashi, Ken-ichi; Kriesell, Matthias, On the number of 4-contractible edges in 4-connected graphs. J. Combin. Theory Ser. B 99 (2009), no. 1, 97--109.
- ⑦ Ando, Kiyoshi; Egawa, Yoshimi, Edges not contained in triangles and the number of contractible edges in a 4-connected graph. Discrete Math. 308 (2008), no. 23, 3463--5472.
- ⑧ Ando, Kiyoshi; Egawa, Yoshimi, Edges not contained in triangles and the distribution of contractible edges in a 4-connected graph. Discrete Math. 308 (2008), no. 16, 3449--3460.
- ⑨ Ando, Kiyoshi; Kaneko, Atsushi; Kawarabayash, Ken-ichi, Contractible edges in minimally k-connected graphs. Discrete Math. 308 (2008), no. 4, 597--602.

[学会発表] (計 26 件)

- ① Ando, Kiyoshi, Contractible edges in k-connected graphs, 日本数学会年会特別講演 (招待講演), 2012/3/26, 東京理科大学 楽坂キャンパス

- ② Ando, Kiyoshi, Average degree of minimally contraction-critically 6-connected graphs, 23th British Combinatorial Conference, 2011/7/5, Exeter /England
  - ③ Ando, Kiyoshi, An upper bound of the average degree of minimally contraction-critically 6-connected graphs, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010/12/8, Honolulu/ USA
  - ④ Ando, Kiyoshi, Some structural properties of minimally contraction-critically 5-connected graphs, Combinatorics 2010, 2010/6/28, Verbania /Italy
  - ⑤ Ando, Kiyoshi, Wide diameter of k-connected graph with diameter d, JCCGG2009 ( Japan conference of combinatorial geometry and graph theory 2009), 2009/11/12, 金沢文化ホール
  - ⑥ Ando, Kiyoshi, Some structural properties of a minimally contraction-critically 5-connected graph, 22nd British Combinatorial Conference, 2009/7/7, St. Andrews /Scotland
  - ⑦ Ando, Kiyoshi, The number of vertices of degree five in a contraction-critically 5-connected graph, Combinatorics 2008, 2008/7/24, Bologna/Italy
6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
安藤 清 (ANDO KIYOSHI)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号：20096944
  - (2) 研究分担者  
江川 嘉美 (EGAWA YOSHIMI)  
東京理科大学・理学部・教授  
研究者番号：70147502

(3)連携研究者

河原林 健一 (KAWARABAYASHI KEN-ICHI)  
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研  
究系・教授  
研究者番号：40361059