

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20340017

研究課題名(和文)フラクタルの数学的諸相

研究課題名(英文)Aspects of Mathematics on Fractals

研究代表者

木上 淳 (KIGAMI JUN)

京都大学・大学院情報学研究科・教授

研究者番号：90202035

研究成果の概要(和文)：本研究では、フラクタルに関する数学的基礎理論を多様な視点から研究した。フラクタル上の解析的構造(確率過程など)から導かれるフラクタルの内的な幾何的構造を明らかにし、その幾何学的構造を用いてフラクタル上の確率過程の漸近挙動、フラクタルを境界とする領域上の関数の境界での挙動などを詳しく調べた。

研究成果の概要(英文)：We have studied various aspects of mathematical foundation of fractals. In particular, we have constructed intrinsic geometrical structure associated with analytical objects like stochastic processes on fractals. Furthermore, based on these geometric structure, we have investigated the asymptotic properties of stochastic processes on fractals and/or boundary behaviors of functions on domains with fractal boundary.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	6,100,000	1,830,000	7,930,000
2009年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2010年度	4,400,000	1,320,000	5,720,000
年度			
年度			
総計	14,500,000	4,350,000	18,850,000

研究分野：フラクタル上の解析学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：1.フラクタル 2. 確率過程 3. 熱核 4. タイリング 5. 複素力学系 6. ジュリア集合

1. 研究開始当初の背景

フラクタルはマンデルブローによって、自然界を表現するのに適切な新しいモデルとして提唱された。それ以来フラクタルは、物理学、化学などの自然科学に留まらず工学・社会科学などの広い分野において多くの有用な応用を生み、近年では現代科学の基礎をなす概念の一つとして認知されている。数学においてもフラクタルの基礎理論として、フラクタル幾何学、力学系、タイリング、フラ

クタル上の解析学の多様な観点から幅広い研究が行われてきた。そのような研究の進展に伴い、数学的に異なった観点からの研究の間に重要な関係が見いだされつつあり、これが本研究の出発点となった。

2. 研究の目的

本研究の目的はフラクタルを多様な数学的な視点から研究することにある。フラクタル

は数学の諸分野（代数学、幾何学、解析学）の接点に位置している。例えば、自己相似集合によるユークリッド空間のタイリングは幾何学的な問題であるが、それを特徴付けるのは自己相似集合を生成する縮小写像の縮小率などの代数的な性質であることがわかっている。さらに近年、主にフラクタル上の解析学の視点から、フラクタルの上に解析的な構造に適合した距離を定義する試みがなされ、それらの距離が解析的な対象を記述するのに有用であることが分かってきた。このようなフラクタルに内在する構造はその代数的、幾何学的な性質と深く結びついている。本研究では、フラクタルに内在する数学的構造を多様な数学的視点（フラクタル幾何学、フラクタル上の解析学、力学系の不変集合としてのフラクタル）から研究しその全体像を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

研究の主な方法は、

(a) 国内外の研究集会への参加、国内外の研究者の招聘などを通じて関係する分野の専門家から最新の研究成果に関する情報を交換し、さらに共通の問題に対して議論を深めること
(b) 関連する文献の調査により、既存の方法、既知の知識に対する理解を深めること、である。(a)に関しては、研究成果、発表論文に見られるように国内外の研究者と本研究課題に関する議論を行い、その結果として国際的な共同研究に発展し多くの成果を挙げた。特に、2010年3月20日、21日には本研究と Chinese University of Hong Kong の数学教室との共催で「Kyoto University/CUHK joint workshop on Analysis and Geometry of Fractals and Metric Measure Spaces」を香港にて開催した。この研究集会においては、日本、中国、香港、ドイツなどから12人の研究者が集まり、最新の研究成果を発表するとともに、今後の研究課題に対して議論を深めた。また、2011年2月には本研究の総括および将来の研究課題の検討のため、本研究主催で、Workshop「フラクタルの数学的諸相」を開催した。

4. 研究成果

(1) 研究代表者木上は、Tree 上の random walk からその Martin 境界である Cantor 集合上に誘導される jump process 及び一般の resistance form から誘導される Hunt process に関して、volume doubling property の元でそれらの漸近挙動

を記述するのに最適な距離の存在を示し、その距離の元での熱核の漸近評価を与えた。

(2) 分担者相川は、
1. John 領域において調和測度が強ダブリングであることと、領域が準一様であることが同値であることを示した。
2. 任意の領域において大域的な境界 Harnack 原理が成立することと、大域的な Carleson 評価が成立することが同値であることを示した。さらに、少し追加条件を与えると、局所的な境界 Harnack 原理の成立と局所的な Carleson 評価の成立が同値であることを示した。
3. 境界上の連続関数の Dirichlet 問題の解が境界まで連続に延びるとき領域は正則であると言われ、その特徴付けはよく知られている。これを一歩進め、境界上の連続率が解の連続率に伝わる条件を研究した。

(3) 分担者熊谷は、
1. フラクタル上の解析学における主要な未解決問題であった、Sierpinski carpet 上のブラウン運動の一意性の問題を肯定的に解決した。(Barlow 氏、Bass 氏、Teplyaev 氏との共著論文)
2. D次元正方格子上の対称マルコフ連鎖が飛躍型確率過程に収束するための十分条件を、ディリクレ形式の手法を用いて導出し、長距離相関があるランダムコンダクタンスモデルに応用した。(Chen 氏、Kim 氏との共著論文)

(4) 分担者伊藤は、
「フラクタル境界をもつ領域による準周期タイリングとその力学系」について研究を推進し、諸分野にみられる準周期タイリング（ときとしてそのプロトタイプはフラクタル境界をもつ領域となる）を unimodular な Pisot/non-Pisot の substitution を用いて構成する理論の完成をみた。さらに、その準周期フラクタルタイリングを用いて得られる新しい離散力学系（それは Domain exchange と呼ばれている）力学系としての特性を調べる研究を進展させた。

(5) 分担者宍倉は、
1 変数複素力学系の分岐現象および、相空間内のジュリア集合について研究した。特に、無理的中立不動点を持つ複素力学系については、回転数が高いタイプの場合に近放物型くりこみを用いるとある種のアプリオリ評価が得られていたが、それをどのように相空間の構造に反映させるかについて、力学系的座標系という概念を導入した。また木坂氏との共同研究で、あるクラスの超越関数のジ

ジュリア集合がなめらかな曲線からなることを示した。

(6) 分担者亀山は、リーマン球面上の有理関数のジュリア集合のコーディングについて研究を行った。geometric coding tree から定まるコーディングを考えることは、ジュリア集合のフラクタル構造と、有理関数の組合せ構造を深く結びつける。このとき、以下の (a), (b), (c), (d) を証明した。

(a) 双曲的な有理関数 f について、ジュリア集合がコントロール集合になること

(b) ある $n > 0$ について f^n に関し一対一のgeometric coding があることは同値

(c) geometric coding の重複度は f の次数のべきである

(d) 真に $n > 1$ となる (つまりコントロール的なジュリア集合だが、一対一のgeometric codingがない) 例も作れる

(7) 分担者日野は、強局所正則Dirichlet形式に関して指数という概念を導入し、その性質について研究した。得られた知見をもとに、Sierpinski Carpet上のブラウン運動に関するマルチンゲール次元がスペクトル次元以下であることを示した。特に点再帰的なケースではマルチンゲール次元が1であることが従う。これは無限分岐的なフラクタルに関するマルチンゲール次元について初めて得られた情報である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計31件)

①P. Arnoux, M. Furukado, E. Harriss, S. Ito, Algebraic numbers, free group automorphisms and substitutions of the plane, Trans. Amer. Math. Soc. 363, 2011, 4651-4699.

②J. Kigami, Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees. Adv. Math. 225, 2010, 2674--2730

③M.T. Barlow, R.F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets. J. European Math. Soc., 12 (2010), 655--701.

④Masanori Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proc. London Math. Soc. 100 (2010), 269-302.

⑤Shunji ITO and Taizo SADAHIRO, Beta-Expansions with Negative Bases Integers, 9 (2009), 239--259.

⑥J. Hubbard, D. Schleicher and M. Shishikura, Exponential Thurston maps and limit of quadratic differentials, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 77-117.

⑦M.T. Barlow, A.A. Járai, T. Kumagai and G. Slade, Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions. Comm. Math. Phys., 278 (2008) 385--431.

⑧Masanori Hino, Martingale dimensions for fractals, Ann. Prob. 36 (2008), 971-991.

[学会発表] (計78件)

①M. Shishikura, Renormalization for irrationally indifferent fixed points of holomorphic functions, Frontiers in Complex Dynamics, Banff International Research Station, Banff, Canada, 20--25, Feb. 2011,

②T. Kumagai, Convergence of symmetric Markov chains on Z^d , The 34th Conference on Stochastic Processes and their Applications, Osaka, 7 Sept. 2010

③M. Hino, Martingale dimensions for self-similar fractals, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Osaka, 10 Sept. 2010

④J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, Workshop "Analysis and Probability on Fractals", Fourier Institute, Grenoble, France, June 1-4, 2010

⑤H. Aikawa, Positive Harmonic functions on nonsmooth domains, Summer School in Conformal Geometry, Potential Theory, and Applications, NUI Maynooth, Ireland, 23--27 June 2009

⑥S. Ito, Quasi-periodic tilings from non-Pisot unimodular matrices, Mini-Workshop: The Pisot Conjecture - From Substitution Dynamical Systems to Rauzy Fractals and Meyer Sets, Oberwolfach, Germany, 1--7, March 2009

⑦J. Kigami, Dirichlet forms and heat kernels on the Cantor sets as the traces of random walks on trees, Workshop on Fractals and Tilings 2009, July 6-10, 2009, Strobl(Austria)

⑧J. Kigami, Dirichlet forms and heat kernels on the Cantor sets as the traces of random walks on trees, 1054st AMS meeting, Riverside, California, November 7-8, 2009

[図書] (計3件)

①Kigami, Jun Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets. Mem. Amer. Math. Soc. 199 (2009), 94pp.

②相川弘明、複雑領域上のディリクレ問題ーポテンシャル論の観点から、岩波書店(2008)、302pp

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

木上 淳 (KIGAMI JUN)
京都大学・大学院情報学研究科・教授
研究者番号：90202035

(2)研究分担者

宍倉 光広 (SHISHIKURA MITSUHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70192606

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20137889

亀山 敦 (KAMEYAMA ATSUSHI)
岐阜大学・工学部・教授
研究者番号：00243189

日野 正訓 (HINO MASANORI)
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：40303888

伊藤 俊次 (ITO SYUNJI)
金沢大学・大学院自然科学研究科・特任研究員
研究者番号：30055321

(3)連携研究者

長田 博文 (OSADA HIROFUMI)
九州大学・大学院数理科学研究所・教授
研究者番号：20177207

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50230024

服部 哲弥 (HATTORI TETSUYA)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：10180902

高橋 智 (TAKAHASHI SATOSHI)
奈良女子大学・大学院人間文化研究科・准教授
研究者番号：70226835

栗田 和正 (KUWADA KAZUMASA)
お茶の水女子大学・理学部・講師
研究者番号：30432032

若野 功 (WAKANO ISAO)
京都大学・大学院情報学研究科・講師
研究者番号：00263509

久保 雅義 (KUBO MASAYOSHI)
京都大学・大学院情報学研究科・講師
研究者番号：10273616