

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20340018

研究課題名（和文） 地球科学的な熱対流系における流れパターン形成

研究課題名（英文） Flow pattern formation in a geophysical thermal convection system

研究代表者

山田 道夫（YAMADA MICHIO）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90166736

研究成果の概要（和文）：

地球惑星科学に関連して現れる典型的な熱対流系，特に，回転する球殻内の熱対流系における対流パターンの性質について，回転角速度と内外境界の温度差への依存性を中心に調べた。その結果，温度差の増大と共に発生する臨界対流パターンについて分岐ダイアグラムを数値的に求め，対流パターンの東西位相速度の連続変化やその物理的機構を明らかにした。さらに内外境界と流体運動の力学的相互作用を調べ，境界の差動回転やカオスの挙動の存在を示した。

研究成果の概要（英文）：

Thermal convection in a rotating spherical shell, typical in earth and planetary sciences, is studied with an attention focused on its dependence on the angular velocities of the inner and the outer boundaries and on the temperature difference between the boundaries. The bifurcation diagram is obtained, where the zonal phase velocity of the convection pattern is found to change its direction, and its physical interpretation is given in terms of the vorticity dynamics and weakly nonlinear theory. Dynamical interaction between the boundaries and the fluid is also studied to find the differential rotation and chaotic behaviors of the boundaries.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
2009年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2010年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2011年度	3,200,000	960,000	4,160,000
年度			
総計	14,900,000	4,470,000	19,370,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：応用数学，流体，熱対流

1. 研究開始当初の背景

(1) 熱対流の流れパターンは古くからその発生機構に興味を持たれてきたが、特に1960年代以降、2枚の平行平板の間のベナール対流について分岐ダイアグラムの詳細が調べ

られた。その後、二つの同心球面の間で球の中心方向に重力を受ける球殻内対流についても、地球惑星科学との関連から多くの研究が行われてきた。この対流系は、それ自身基本的な流体系であるが、地球や惑星の内部に

おけるマントルや核の流れパターンを想定して理想化された系でもある。しかしながら、幾何学的な形状に起因する数値的解析的な複雑さから、分岐ダイアグラムには未知の部分が多く、臨界面すらも明確に知られていなかった。

(2) さらにこれらの分岐解の性状、特に、解の重要な特徴の一つである東西方向位相速度についても、スポット的計算はあるものの、大域的なパラメータ依存性は明らかではなかった。また従来の研究は、内外球境界における境界条件を同期回転とするものが多く、現実の地球や惑星のように境界自身の運動を許す条件下で境界がどのように回転するのも明らかでなかった。

2. 研究の目的

(1) 上記のような状況から、本研究の目的の第一は、内部熱源を伴う回転球殻内ブシネスク熱対流系において Rayleigh 数が増加する際の静止状態の臨界点を多くの Taylor 数において数値的に調べ、臨界面を求めることである。

(2) 目的の第二は、内部熱源を伴う同じ熱対流について、臨界モードの性質、特に球表面等の境界における振る舞いに影響をもたらす東西位相速度等を、多くのパラメータ値に対して数値的に調べ、臨界対流の性質のパラメータ依存性を明らかにすることである。さらに Rayleigh 数を増加させたときに現れる強い非線形性をもつ解に対してこれらの性質を調べることも研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 内部熱源を含む回転球殻内ブシネスク熱対流の方程式を、速度偏差のトロイダル及びポロイダルポテンシャルと温度偏差の3つを未知関数として扱い、それぞれを、緯度経度方向は球面調和関数、動径方向はチェビシェフ多項式を用いて展開し、ガレルキン近似方程式を導いて数値計算を行う。

(2) まず、球殻の内外境界球面を同じ回転角速度で同期回転させる場合の熱対流パターンを扱う。静止状態の線形安定性固有値問題を、多くのパラメータ値において、上述のガレルキン近似で解き、臨界点および臨界モード（東西方向定常進行波解）を調べる。特に東西位相速度に注意する。

(3) 次に、得られた臨界点および臨海モードから、Newton 法を用いて分岐解を求め分岐ダイアグラムを描く。またこれらの分岐解の線形安定性をやはりガレルキン法を用いて計算し、二次分岐点および二次不安定を調べ

る。

(4) このようにして得られた分岐ダイアグラムおよび分岐解について、経度方向平均東西速度の子午面分布や動径速度の赤道面分布など、流れ場の諸量の分布を多様な方法で可視化し、東西方向位相速度など解の特徴的性質と流れ場の関係を調べる。

(5) さらに、内外境界を作る内側球を外側球殻に対し3軸回転を許す条件のもとで熱対流パターンの安定性や分岐構造、非定常解の性質を調べ、内外境界の差動回転や非一様運動の可能性を調べる。

4. 研究成果

内外球殻が同期回転する場合について、速度場に内外境界上の剛体境界条件を課し、臨界 Rayleigh 数（内側境界と外側境界の無次元化温度差）を数値的に求めた。球殻の半径比は従来多く採用されている値 0.4 を採用し、Prandtl 数は 1 として計算を行った。

Taylor 数 T （無次元化回転角速度の2乗）が小さなきには経度方向臨界波数は3であるが、 $T=51^2$ において臨界波数は4に、さらに $T=860^2$ において5に変化し、Taylor 数とともに臨界経度方向波数が増加する。また臨界 Rayleigh 数も Taylor 数と共に増加し、 $T=500^2$ のときの臨界 Rayleigh 数は $T=52^2$ のときの約4倍である。

臨界モードは、赤道断面において、経度方向に臨界波数の個数の正負の渦対を持つが、Taylor 数が小さなきは個々の渦が前後対称であるのに対し、Taylor 数が増加すると外側境界に近い渦の部分が回転方向に延ばされ、前後の非対称性とスパイラル構造が現れる。またこれらの渦は子午面において、Taylor 数の増加とともに、初め外側境界に沿って湾曲していた渦が、次第に回転軸方向に延び明瞭な Taylor 柱を形成することが観察される。これらの変化はいずれも同一の臨界モードの連続的な変化によるものであり、モードの入れ替えなどによる急激な変化は発生しない。

臨界モードの東西方向位相速度は、Taylor 数が小さなきは（内外境界と共に回転する座標系からみて）西向き（retrograde）であるが、 $T=330^2$ 付近において西向きから東向き（prograde）に連続的に変化し、Taylor 数の増加と共に東向き速度が増加する（図1）。この東西方向位相速度の変化は上述のように同一の臨界モードの性質の連続的な変化によるものである。

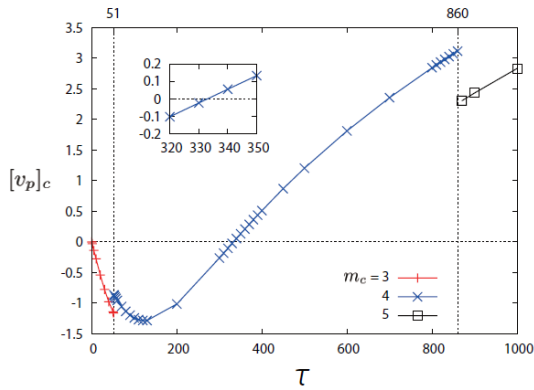


図 1： 臨界モードの東西位相速度 ($T = \tau^2$)

この位相速度の変化には次のような物理的説明が可能である。臨界モードの東西方向位相速度の向きの変化は、湾曲した渦が次第に回転軸方向に延びることと対応している。渦の流れに沿う渦管の伸び縮みは湾曲した渦と真っ直ぐな渦（上下端は外側境界に沿って変形）で逆になるため、ポテンシャル渦度の保存則から相対渦度の変化が逆符号となり、これが東西方向位相速度の符号変化を引き起こすと解釈される。

臨界点からさらに大きな Rayleigh 数において Newton 法によって東西方向定常進行波解を求めた。その結果、上で計算した臨界モードについてはすべて、臨界点から分岐する超臨界の東西方向定常進行波解が存在することを見出した。 $T > 70^2$ においては、Rayleigh 数が増加するにつれ東西方向位相速度は（東向きを正として）減少する。この結果、臨界点で東向きであった位相速度はいずれも Rayleigh 数の増加とともに減少して西向きとなり、さらに Rayleigh 数を増加すると解は Hopf 不安定となる（図 2）。

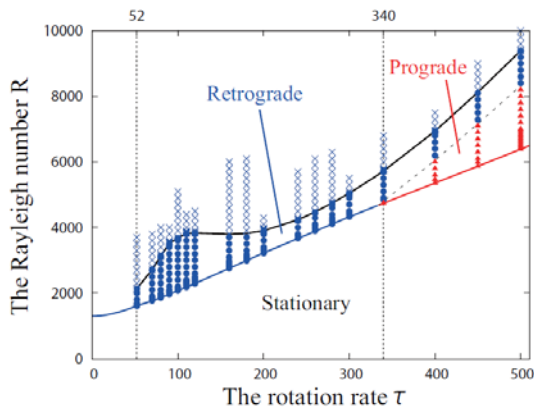


図 2： 分岐解の東西方向の位相速度 ($T = \tau^2$, ×は不安定)

この超臨界進行波解の東西方向位相速度の

向きが変化する前後で、回転軸方向の渦の Taylor 柱はほとんど直立を保つため、臨界モードの位相速度変化の物理的説明は適用することができない。そこで振幅の大きな超臨界進行波解において東西流の東西平均にみられる東西方向のジェットを調べた。Taylor 数が小さなときは東西ジェットの位置が熱対流セルの外側にあり東西位相速度への影響が少ない。しかし Taylor 数が大きなときは、西向きジェットが対流セルの内側に位置するため、位相速度への影響が大きいと考えられる（図 3）。一方 Rayleigh 数の増加と共にジェットの西向き速度が増加傾向にあるため、高 Taylor 数のときほど、ジェットの西向き速度の増加と熱対流パターンの西向き位相速度の増加に強い相関が生まれる。即ち、高い Taylor 数の大振幅熱対流のパターンは、対流セルの位置に発生する西向きジェットによって西向きに流される、と解釈できることが分かった。

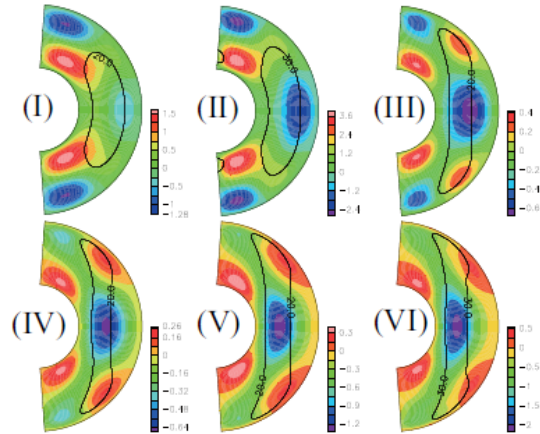


図 3： 高 Rayleigh 数における東西速度の東西平均（赤が東向き、青が西向き。黒線は Taylor 柱の位置）。数字の順に Taylor 数が増加。

次に、内側球・外側球殻の運動と対流運動の相互作用を調べた。外側球殻の角速度を一定にし、内側球に流体のトルクで回転する自由度を与えて、臨界点から超臨界分岐する東西方向定常進行波解を Newton 法で求めた。その結果、 $T < 100^2$ では内側球は外側球殻に対して西向きに回転するが、 $200^2 < T < 300^2$ でほぼ同じ角速度で回転し $T > 400^2$ では内側球は外側球殻に対して東向きに回転することが分かった。この解の安定領域は、両側境界が同期回転する場合と 1%程度の差で一致し、熱対流のパターンも定性的に同じである。

また、内側球と外側球殻を共に流体のトルクによって自由回転させた場合について、時間発展の数値計算を行った。 $T = 500^2$ のとき、

Rayleigh 数を臨界値の 4.7 倍とした計算では、熱対流パターンはカオス的となるものの、赤道対称性を保ち、流体が境界に及ぼすトルクも回転軸方向の成分しか持たない。しかし Rayleigh 数を臨界値の 7.8 倍とした計算では、カオス的な熱対流パターンは、赤道対称性を失い、流体が内側球と外側球殻に与えるトルクも有意な 3 軸成分をもつことが分かった。このため、南北非対称熱対流のパラメータ領域では、内側球の角運動量の非回転軸方向 (x, y 軸方向) の成分は有意な値を持ち、角運動量ベクトルはカオス的に変動する。

地球の場合にも、中心核の回転角速度は外側球殻と異なるとする観測が知られている。現実の地球惑星現象に適用するためにはパラメータ領域など残された問題も多いが、本研究結果との関連は興味深い

このほか本研究では、回転球殻対流パターンや対流カオス運動と関連する問題として、回転球面上の 2 次元流体の長時間の漸近挙動、回転球面上の東西方向ジェットの安定性と分岐、回転球面上の円形領域における 2 次元流体の振る舞い、2 次元流体のカオス運動、カオスアトラクタなどについての研究も行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① Masanobu Inubushi, Miki U. Kobayashi, Shin-ichi Takehiro, Michio Yamada, Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows, *Physical Review E*, vol. 85, 2012, 016331, 10PP, DOI: 10.1103/PhysRevE.85.016331
- ② Keiichi Kimura, Shin-ichi Takehiro, Michio Yamada, Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell. *Physics of Fluids*, 査読有, vol.23, 2011, 074101, 11 PP, DOI: 10.1063/1.3602917
- ③ Youhei Sasaki, Shin-ichi Takehiro, Kiyoshi Kuraoto, Yoshi-Yuki Hayashi, Weak-field dynamo emerging in a rotating spherical shell with stress-free top and no-slip bottom boundaries. *Physics of earth and planetary interiors*, 査読有, vol.188, 2011, 203-213, DOI: 10.1016/j.pepi.2011.06.019
- ④ K. Sugiyama, K. Nakajima, M. Odaka, M. Ishiwatari, K. Kuramoto, Y. Morikawa, S. Nishizawa, Y. O. Takahashi, Y.-Y. Hayashi, Intermittent cumulonimbus activity breaking the three-layer cloud structure of Jupiter, *Geophysical Research Letters*, 査読有, vol.38, L13201, 5 PP, DOI: 10.1029/2011GL047878
- ⑤ Kiori Obuse, Shin-ichi Takehiro, Michio Yamada, Linear stability of steady zonal jet flows induced by a small-scale forcing on a beta plane. *Physica D*, 査読有, vol.240, 2011, 1825-1834, DOI: 10.1016/j.physd.2011.08.009
- ⑥ K. Obuse, S. Takehiro, M. Yamada, Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere, *Physics of Fluids*, 査読有, vol.22, 2010, 056601, 9 PP, DOI: 10.1063/1.3407652
- ⑦ Shin-ichi Takehiro, Michio Yamada, Yoshi-Yuki Hayashi, Retrograde equatorial surface flows generated by thermal convection confined under a stably stratified layer in a rapidly rotating spherical shell. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 査読有, vol.105, 2011, 61-81, DOI: 10.1080/03091929.2010.512559
- ⑧ Shin-ichi Takehiro, On the retrograde propagation of critical thermal convection in a slowly rotating spherical shell, *Journal of Fluid Mechanics*, 査読有, vol.659, 2011, 505-515, DOI:10.1017/S0022112010003101
- ⑨ Shin-ichi Takehiro, Kinetic energy budget analysis of spiraling columnar critical convection in a rapidly rotating spherical shell. *Fluid Dynamics Research*, 査読有, vol.42, 2010, 055501, 15PP, DOI: 10.1088/0169-5983/42/5/055501
- ⑩ A. C. Chian, R. A. Rodrigo, E. L. Rempel, Y. Saiki and M. Yamada, Amplitude-phase synchronization at the onset of permanent spatiotemporal chaos, *Physical Review Letters*, vol.104, 2010, 254102, 4PP, DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.254102
- ⑪ Yoshitaka Saiki, Michio Yamada, Time averaged properties along unstable periodic orbits and chaotic orbits in ordinary differential equation systems, *Physical Review E*, 査読有, vol.79, 2009, 015201(R), 4PP, DOI: 10.1103/PhysRevE.79.015201

- ⑫ Yuki Taniguchi, Hediaki Kitauchi, Michio Yamada, Stability of flow on a rotating polar cap. Fluid Dynamics Research, 査読有, vol.41, 2009, 045511, 16PP, DOI: 10.1088/0169-5983/41/4/045511
- ⑬ Shin-ichi Takehiro, Physical interpretation of spiraling-columnar convection in a rotating annulus with radial propagation properties of Rossby waves, Journal of Fluid Mechanics, 査読有, vol.614, 2008, 67-86, DOI: 10.1017/S0022112008003194

[学会発表] (計 40 件)

- ① Michio Yamada, Beta plane turbulence. Wave turbulence meeting 2012 in Gifu, 2012/3/14, Gifu University, Japan.
- ② 山田道夫, 波による秩序流形成の定量的評価について. HMC セミナー, 2012/1/27, 金沢大学.
- ③ Eiichi Sasaki, Bifurcations of Zonal Flow Patterns and Zonal Mean Flows in 2D Navier-Stokes flow on a Sphere. Dynamics Days 2012 US, 2012/1/5, Baltimore, USA.
- ④ 山田道夫, Rossby 波による平均流加速 — 定量的予測について, 第 13 回地球流体力学研究集会「地球流体における波動と対流現象の力学」, 2011/12/15, 九州大学.
- ⑤ Masanobu Inubushi, Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows and time-correlation function. IUTAM Symposium on 50 Years of Chaos : Applied and Theoretical, 2011/11/30, Kyoto University, Japan.
- ⑥ Kiori Obuse, Instability and merging of jets in turbulent flows on a beta-plane. JIFT Workshop: Hierarchical Self-Organization of Turbulence and flows in Plasmas, Oceans and Atmospheres, 2011/10/24, Kyoto University, Japan.
- ⑦ Michio Yamada, Rossby waves and zonal flow generation. JIFT workshop: Hierarchical Self-Organization of Turbulence and Flows in Plasmas, Oceans and Atmosphere, 2011/10/24, Kyoto University, Japan.
- ⑧ Michio Yamada, Numerical study of two-dimensional turbulence on a rotating sphere. The 36th Sapporo symposium on partial differential equations, 2011/8/23, Hokkaido University, Japan.
- ⑨ Keiichi Kimura, Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a rotating spherical shell. The 4th International Symposium Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics (BIFD2011), 2011/7/20, Barcelona, Spain.
- ⑩ 山田道夫, 回転球面上の流体運動. 風工学会, 2011/5/24, 大阪市立大学.
- ⑪ 木村恵二, 回転球殻内における Boussinesq 熱対流による平均帯状流生成メカニズム, 日本地球惑星科学連合 2011 年大会, 2011/5/22, 千葉幕張メッセ.
- ⑫ 谷口由紀, 回転球面上の極冠流れの西岸強化流への転移について. 第 60 回理論応用力学講演会, 2011/3/10, 東京工業大学.
- ⑬ 木村恵二, 回転球殻内の Boussinesq 熱対流の安定性と分岐構造. 日本物理学会 (秋季大会), 2010/9/25, 大阪府立大学.
- ⑭ Eiichi Sasaki, Bifurcation structure of zonal flow solutions on a rotating sphere. Dynamics Days Europe 2010, 2010/9/9, University of Bristol, UK.
- ⑮ 木村恵二, 回転球殻内における Boussinesq 熱対流の安定性と分岐構造. 日本応用数理学会 2010 年度年会, 2010/9/8, 明治大学.
- ⑯ K. Kimura, Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a rotating spherical shell. 12th Symposium of Study of the Earth's Deep Interior (SEDI), 2010/7/21, University of California, Santa Barbara, USA.
- ⑰ 木村恵二, 回転球殻内における Boussinesq 熱対流の有限振幅パターンの安定性と伝播方向について. 2010 年日本地球惑星科学連合大会, 2010/5/24 千葉幕張メッセ.
- ⑱ 木村恵二, 回転球殻内における Boussinesq 流体の有限振幅パターンの安定性と伝播方向について. 統計数理研究所共同利用研究集会「乱流の統計理論とその応用」, 2010/3/17, 統計数理研究所 (東京都).
- ⑲ 山田道夫, 2次元 Navier-Stokes 方程式における乱流化について, 北陸応用数理研究会 2010, 2010/2/13, 金沢大学.
- ⑳ Miki U. Kobayashi, Mechanism of a temporal intermittency in the GOY shell model turbulence. Exploring Complex Dynamics in High-Dimensional Chaotic Systems, 2010/1/15, Max Planck Institute, Germany.

- 21 小布施祈織, 回転球面上における 2 次元強制乱流. 日本物理学会 2009 年秋季大会, 2009/9/28, 熊本大学.
- 22 Y. Saiki, Time averaged properties along unstable periodic orbits in some systems of differential equations, The Third International Symposium on Recurrence Plots, 2009/8/26, University of Montreal, Canada.
- 23 山田道夫, 乱流の少数自由度モデルと力学系的記述, 数理解析研究所研究集会「双曲力学系から大自由度力学系へ」, 2009/8/20, 京都大学
- 24 山田道夫, 大自由度力学系としての乱流, 数理解析研究所研究集会「双曲力学系から大自由度力学系へ」, 2009/8/18, 京都大学
- 25 Michio YAMADA, Two-dimensional turbulence on a rotating sphere and the beta-plane. Lecture Meeting: Hasegawa-Mima equation, 30 years and future. 2009/5/21, 京都大学
- 26 M.Yamada, Two-dimensional turbulence on a rotating sphere, The 5th GN workshop: Workshop on Wave Turbulence, 2009/03/27, Gifu University
- 27 山田道夫, 回転球面上の 2 次元流体運動について, 北陸応用数理研究会 2009, 2009/2/12, 金沢大学.
- 28 Y. Saiki, Time Averaged Properties along Unstable Periodic Orbits in Some Systems of Ordinary Differential Equations, Dynamics Days 2009, 2009/1/10, San Diego (USA).
- 29 山田道夫, 低次元カオス系における軌道平均値について. 岐阜非線形セミナー, 2008/12/5, 岐阜大学工学部.
- 30 谷口由紀, 回転球面上の極冠領域内の流れの安定性. 日本応用数理学会 2008 年度年会, 2008/9/17, 東京大学.
- 31 谷口由紀, 回転球面上の極冠領域内の流れの安定性. 日本流体力学会年会 2008, 2008/9/6, 神戸大学.
- 32 谷口由紀, 回転球面上の円領域内の流れパターンとその安定性について. 第 57 回理論応用力学講演会, 2008/6/12, 日本学術会議.
- 33 谷口由紀, 回転球面上の円領域内の流れパターンとその安定性について. 日本地球惑星科学連合 2008 年大会, 2008/5/27, 千葉幕張メッセ.
- 34 竹広 真一, 上層の安定成層下に閉じ込められた高速回転する球殻内の超臨界対流により引き起こされる赤道逆行流. 日本地球惑星科学連合 2008 年大会, 2008/5/27, 千葉幕張メッセ.

[図書] (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田道夫 (YAMADA MICHIO)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90166736

(2) 研究分担者

岡本 久 (OKAMOTO HISASHI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：40143359
竹広真一 (TAKEHIRO SHIN-ICHI)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：30274426
林 祥介 (Hayashi Yoshi-Yuki)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号：20180979