

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2012

課題番号：20340019

研究課題名（和文） 数理ファイナンスにおける確率制御・フィルタリングの方法の発展と応用

研究課題名（英文） Development of the methods of stochastic control and filtering in mathematical finance

研究代表者

長井 英生（ NAGAI HIDEO ）

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：70110848

研究成果の概要（和文）：数理ファイナンスの分野における期待効用最大化に関連したポートフォリオ最適化問題や、デリバティブの価値評価に関わる問題を、一般的な市場モデルにおける確率制御問題として考察し、フィルタリング理論や動的計画原理に基づく解析を展開した。特に、ダウンサイドリスク最小化問題を新たな視点で考察した大偏差確率制御問題に関して、双対性定理等の著しい成果を得た。

研究成果の概要（英文）：We considered the portfolio optimization problems related to expected utility maximization and valuation of the derivatives as certain kinds of stochastic control problems and developed analysis based on filtering theory and the dynamic programming principles. In particular, we obtained notable results e.g. duality theorems etc., on the large deviation control problems by bringing new aspects in considering down side risk minimization.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2009 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2010 年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2011 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2012 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
総計	14,900,000	4,470,000	19,370,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：大偏差確率制御、H-J-B 方程式、ポートフォリオ最適化、デリバティブの価値評価、双対性定理、エルゴード型確率制御、リスク鋭感的確率制御、粘性解

### 1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスにおいて、完備な市場のモデルに関する理論はほぼ完成されているとあってよいが、一方、現実の市場は完備ではありえないとされ、非完備な市場の数理モデルの解析が多くの研究者の関心を呼んでいた。非完備な市場のモデルにおける、デリバティブの価格付け、期待効用最大化、リスクの計量化等を考察するとき、しばしば、確率制御・フィルタリングの手法が有力となるばかりか、それらの問題から確率制御・フィルタリングの新たな問題が提起され、それを解決することにより、翻って市場のモデルにおける上記各種問題の解決が図られるという状況にあった。特に

（1）ポートフォリオ最適化に関しアップサイドチャンス最大化や、ダウンサイド最小化と呼ばれる問題で、保有資産の成長率が、時間大域的に決められた以上（あるいは以下）になる確率を最大化（あるいは最小化）する

問題を大偏差確率制御問題という新しい問題と捉えて考察しようという動きがみられた。また、

(2) 観測可能でないファクターに証券価格のボラティリティが依存している場合、従来のフィルタリング理論が適用できないため、期待効用最大化やデリバティブの価値評価の問題が、部分情報下の新しい確率制御問題として定式化されることが、認識されるようになっていた。さらに、

(3) 市場のデータによりよくマッチする飛躍型市場モデルに関する期待効用最大化やデリバティブの価格付け(価値評価)は非完備市場における新たな問題として注目されるようになっていた。

(4) また、消費を考慮に入れた最適投資・消費問題は、その対応する、H-J-B 方程式の解析的取り扱いや確率解析の困難さから多くの問題が残されていた。

## 2. 研究の目的

(1) 上記1. で述べた背景の(1)に関連して、特に当時から未解決問題であった、ダウンサイドリスク最小化問題を大偏差確率制御問題として考察することをまず第一の目的とした。特に

①線形ガウス型モデルに対して完全情報下で考察すること、

②線形ガウス型モデルに対して部分情報下で考察すること、

③一般的なファクターモデルで考察すること、  
を目的とした。次に

(2) 上記1. で述べた背景(2)に関連して証券価格過程のボラティリティがファクター過程に依存する場合、まずは、期待効用最大化問題について、

①対数効用の場合

②べき型効用の場合

それぞれについて、流動性が低い証券価格過程の場合に、部分情報下の確率制御に関する新たな問題として定式化し、考察することを目的とした。

(3) 上記1. で述べた背景(3)に関連して、飛躍型市場モデルにおいて

①デリバティブの価値評価における基礎理論を確立すること、

②期待効用最大化問題を考察すること、  
を問題とした。さらに、

(4) 上記1. で述べた背景(4)に関連して、時間無限範囲の場合と有限範囲のばあいについて最適投資・消費問題を確率制御問題として考察することを目的とした。

## 3. 研究の方法

(1) 上記2. 研究の目的の(1)に関して。

① および ② に関しては対応する、リスク

鋭感的確率制御の H-J-B 方程式の解がリッカチ常微分方程式の解を用いて表現できることから、このリッカチ方程式の時間大域的解析を通じて、双対性定理の証明および、漸近的最適戦略の構成を行う。③に関しては、リスク鋭感的確率制御のエルゴード型 H-J-B 方程式の解析を、函数解析的手法も援用して行う。また、①-③に共通した方法として、大偏差確率の下からの評価を得る際に、等価な確率微分ゲームを導入する。

(2) 上記2. 研究の目的の(2)に関して。Cvitanic-Liptser-Rozovskii の最近の研究によって得られたフィルタリングの理論がこの問題に適用可能であると認識し、その手法と近似手法を用いて、新たな動的計画原理の確立し、ある種の不動点定理を導くことでこの問題の解決を図る。

(3) 上記2. 研究の目的の(3)に関して。新たに、リスク鋭感的価値尺度を導入し、この尺度による価値評価を行い、その上で期待効用最大化問題を考察する。

(4) 上記2. 研究の目的の(4)に関して。最適投資・消費問題の H-J-B 方程式の可解性に関しては、Leray-Schauder の不動点定理を用いて考察する。その後、粘性解理論による方法も検討する。

## 4. 研究成果

(1) 上記2. 研究の目的の(1)に関して、①線形ガウス型モデルに対して、確率(ダウンサイドリスク)を最小化する問題を考察し、その時間大域的挙動が、リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の双対問題として特徴付けられること、そして、目標成長率に対応するリスク回避係数をもつリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の最適戦略がその最適戦略となることを示した。その成果は研究分担者・畑宏明、研究協力者・S. J. Sheu 氏との共著論文として、著名な国際学術雑誌に発表した。

②同じ問題を部分情報下で考察し、類似の結果ならびに、許容な目標成長率の範囲を具体的に表現した。その成果は国際学術専門誌に発表した。

③ファクターモデルとよばれる非完備な市場モデルに対して、上と同様の問題を、線形ガウス型モデルを含む一般的な場合に考察した。その時間大域的挙動が、リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の時間大域的挙動と双対の関係にあることを示すにあたって、対応するエルゴード型 H-J-B 方程式の更なる解析を行った。その結果、線形ガウス型モデルの場合と同様の結果が得られ、その成果は著名な国際学術雑誌に発表した。代表者は上記それぞれの結果を数々の国際会議の招待講演として発表し、また、日本数学会解析学賞を受賞した。

さらに、ダウンサイドリスク最小化問題に動機づけを得て、一般的な拡散過程の制御項を含む加法的汎関数に関する大偏差確率の評価を得る新たな問題を定式化し、対応するリスク鋭感的確率制御問題の時間大域的挙動に関するエルゴード型 H-J-B 方程式の解析を通じて、相対性定理を示した。その成果は論文として作成中である。

一方、研究分担者・石井はここで取り扱われたエルゴード型 H-J-B 方程式と関係の深いエルゴード型 H-J 方程式に関して深い解析を行い、多くのすぐれた成果を得ている。今後、相互の成果をすり合わせ、討議を重ねることによって、更なる研究発展の可能性が期待される。

(2) 上記 2. 研究の目的の (2) に関して流動性の低い市場モデルに関する期待効用最大化問題を考察し、部分情報下における確率制御として定式化した。対数効用最大化、冪型期待効用最大化のそれぞれに関して値関数の解析を通じて、新たな動的計画原理を示し、また最適戦略の構成を行った。冪型期待効用の場合についてはその成果を国際学術雑誌に発表し、対数効用の場合については投稿準備中である。

(3) 研究分担者宮原は、リスク鋭感的価値尺度 (Risk-sensitive value measure) がプロジェクトの評価に最も適した価値尺度であるという結論を得た。その成果はファイナンスの専門雑誌に掲載された。また、著書においてもその成果を発表した。

(4) 線形ガウス型モデルを含む一般的な場合について、無限時間範囲で最適消費・投資問題を考察し、対応する H-J-B 方程式の解の存在と一意性の証明、および、その解により、最適投資・消費戦略を構成する結果を得た。その成果は論文として作成中である。また、より一般的な場合に、有限時間範囲で同様の問題を考察し、同様の結果を得た。その成果は、研究分担者・畑宏明、研究協力者・S. J. Sheu 氏との共著論文として作成中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 32 件)

- ① G. Barles, H. Ishii and H. Mitake: A new PDE approach to the large time asymptotics of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Bull. Math. Sci. in press (2013) (査読有) DOI 10.1007/s13373-013-0036-0,
- ② H. Nagai :Expected power-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observation, Appl. Math. Optimization

(2013) 67, 33-72 (査読有) DOI 10.1007/s00245-012-9180-2

- ③ Hata, Hiroaki, Kohatsu-Higa, Arturo: A market model with medium/long-term effects due to an insider, Quantitative Finance, Volume 13, Number 3, 1 March 2013 , pp. 421-437(17) (査読有) DOI:10.1080/14697688.2012.695084
- ④ H. Hata and J. Sekine : Risk-sensitive asset management with Wishart autoregressive type factor model", Journal of Mathematical Finance, (2013), 3(1A) 222-229, (査読有) DOI: 10.4236/jmf.2013.31A021
- ⑤ H. Nagai: Downside risk minimization via a large deviations approach, Annals of Applied Probability, vol. 22, (2012) 608-669 (査読有) DOI 10.1214/11-AAP781
- ⑥ H. Nagai : Down-side risk minimization under prescribed consumption level, Risk and Decision Analysis 3(2012) 191-200 (査読有) DOI 10.3233/RDA-2011-0058
- ⑦ G. Barles, H. Ishii and H. Mitake: On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions. Arch. Ration. Mech. Anal. 204 (2012), no. 2, 515-558. (査読有) DOI 10.1007/s00205-011-0484-1
- ⑧ S. Koike, A. Swiech: Local maximum principle for  $L_p$  viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs with unbounded coefficients, Communications in Pure and Applied Analysis, 11, No5. (2012) p. 1897 - 1910, (査読有) doi: 10.3934/cpaa.2012.11.1897
- ⑨ S. Koike, O. Ley: Comparison principle for unbounded viscosity solutions of degenerate elliptic PDEs with gradient superlinear terms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 381 (1) (2011), 110-120. (査読有) DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.03009
- ⑩ H. Nagai: Asymptotics of the probability minimizing a "down-side" risk under partial information, Quantitative Finance, Vol.11(2011) 789-803, (査読有) DOI: 10.180/14697680903341814
- ⑪ H. Ishii: Weak KAM aspects of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, J.

Math. Pures Appl. 95 (2011) 99-135, (査読有)

DOI:10.1016/j.matpur.2010.10.006

- ⑫ H. Hata, H. Nagai and S.J. Sheu: Asymptotics of the probability minimizing a “down-side” risk, Annals of Applied Probability, vol.20 (2010) 52-89, (査読有) DOI: 10.1214/09-AAP618
- ⑬ H. Nagai: Risk-sensitive asset management, Encyclopedia of Quantitative Finance, (ed.) R. Cont, John Wiley & Sons Ltd. Chichester (2010) 1589-1593 (査読有) DOI: 10.1002/9780470061602
- ⑭ A. Kohatsu-Higa and P. Tankov: Jump-adapted discretization schemes for Levy-driven SDEs, Stochastic processes and their applications, vol. 120(2010) 2258-2285, (査読有) DOI:10.1016/j.spa.2010.07.001
- ⑮ Kohatsu-Higa and S. Ortiz :Weak Kyle-Back equilibrium models for Max and ArgMax, SIAM Journal on Financial Mathematics, vol.1 (2010) 179-211, (査読有) DOI:10.1137/080739768
- ⑯ Y. Miyahara: Risk-Sensitive Value Measure Method for Projects Evaluation, Journal of Real Options and Strategy, vol.3 (2010) 185-204, (査読有) <http://www.jstage.jst.go.jp>
- ⑰ S. Koike and A. Swiech: Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, Journal of Mathematical Society of Japan 61 (2009) 723-755 (査読有) DOI: 10.2969/jmsj/06130723
- ⑱ S. Koike and A. Swiech: Existence of strong solutions of Pucci extremal equations with superlinear growth in  $\mathbb{R}^n$ , Journal of the Fixed Point Theory and its Application 5 (2009) 291-304 (査読有) DOI:10.1007/s11784-009-0106-9
- ⑲ H. Nagai and W.J. Runggaldier: PDE approach to utility maximization for market models with hidden Markov factors, “Progress in Probability” vol.59 Seminar on stochastic analysis, random fields and applications (2008) 493-506 (査読有) ISBN 978-3-7643-8457-9

[学会発表] (計 54 件)

- ① H. Nagai “Robust estimates of certain large deviation probabilities for controlled semi-martingales”, March 14-15, 2013, Workshop on Stochastic

Processes and Applications, NCTS, National Tsing Hua University, Taiwan (招待講演)

- ② H. Ishii “ A PDE approach to asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations” CAPM/Nonlinear PDE 2013年2月13日 シカゴ大学数学科(Eckhart 202) (アメリカ) (招待講演)
- ③ H. Nagai “Estimates of certain large deviation probabilities for controlled semi-martingales”, September 24-28, 2012, Perspective in Analysis and Probability, Conference in honor of Freddy Delbaen, ETH Zurich, Switzerland (talk 25-th) (招待講演)
- ④ H. Hata Risk-sensitive portfolio optimization problems with Levy-driven Cox-Ingersoll-Ross interest rates, Research Seminar in Probability, 2012年9月24日 Academia Sinica, Taiwan (招待講演)
- ⑤ H. Nagai “Large deviation estimates for controlled semi-martingales”, July 13-15, 2012, 2012 Ajou workshop on financial economics and mathematics, Suwon, Korea (talk 14-th) (招待講演)
- ⑥ H. Ishii “ Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with the Neumann boundary condition” International Conference in Geometric and Nonlinear Partial Differential Equation, 2012年6月13日 西安交通大学 (中国) (招待講演)
- ⑦ Yoshio Miyahara, “Applications of Risk-Sensitive Value Measure Method to Portfolio Evaluation Problems”, Bachelier Finance Society, 2012. 5. 19, Sydney.
- ⑧ Yoshio Miyahara, “Risk-Sensitive Value Measure and its Applications”, Workshop on Stochastic Processes and Applications, NCTS, Taiwan, 2012/03/09. (招待講演)
- ⑨ H. Nagai “Some remarks on large deviation estimates for controlled semi-martingales”, March 8-9, 2012, 2012 NCTS Workshop on Stochastic processes and Applications, NCTS, Taiwan (招待講演)
- ⑩ H. Ishii “Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with Neumann type BC” , (Dynamical Optimization in PDE and Geometry) 2011年12月19日, ボルドー大学第1, (フランス)
- ⑪ 宮原 孝夫, 「リスク鋭感的価値尺度」

- 日本保険・年金リスク学会 第1回研究会 2011年12月9日、東京都千代田区大手町1-3-1 JAビル8階TG Iフィナンシャル・ソリューションズ本社セミナールーム (招待講演)
- ⑫ 長井 英生 “制御項を含む大偏差確率の評価とエルゴード型H-J-B方程式” Sep. 28 - Oct. 1, 2011, 日本数学会 秋季総合分科会 統計数学分科会特別講演 信州大学、松本 (招待講演)
- ⑬ H. Ishii “Small stochastic perturbations of Hamiltonian flows: a PDE approach” (Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations, 略して, DFDE2011) 2011年 8月15日 スチュエクロフ数学研究所, モスクワ, ロシア (招待講演)
- ⑭ H. Nagai “Asymptotic estimates of Probability minimizing down-side risk and analysis of H-J-B equations of ergodic type” June 30-th - July 2nd, 2011, The 2nd NTH conference on Finance and Insurance Mathematics, Braunschweig, Germany (招待講演)
- ⑮ A. Kohatsu-Higa “Approximation methods for stochastic differential equations driven by Levy processes 2. Seventh Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications., Ascona, Switzerland, May 23 - 27, 2011 (招待講演)
- ⑯ H. Ishii “Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions”, (Riviere-Fabes symposium) 2011年4月16日 ミネソタ大学, ミネアポリス, 米国 (招待講演)
- ⑰ H. Nagai “Asymptotic estimates of probability minimizing down-side risk and H-J-B equations of ergodic type”, February 23, 2011, 2011 Probability One Day Workshop, Academia Sinica, NCTS, National Central University, Taiwan (招待講演)
- ⑱ S. Koike “On viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDE with measurable and unbounded ingredients” Nonlinear PDE’s (招待講演) 2011年1月14日 Valparaiso, Chile
- ⑲ H. Nagai “Down-side risk minimization under prescribed consumption level”, Dec. 15-th-17-th, 2010, International Research Forum “What can the academic community learn from the global crisis: models, methods and transfer” Polytech University, Hong Kong (招待講演)
- ⑳ A. Kohatsu-Higa “A Malliavin calculus method to study SDE’s with irregular drifts” ICM Satellite Conference on Probability and Stochastic Processes (招待講演) 2010年8月13日 Indian Statistical Institute, Bangalore, India
- ㉑ H. Nagai “H-J-B equations with quadratic Hamiltonian in stochastic control and mathematical finance”, July 8-th-10-th, 2010, Ajou Conference on Control Theory and Financial Engineering in honor of Professor Bensoussan, Ajou Univ., Korea (招待講演)
- ㉒ H. Ishii “The Neumann problem for Hamilton-Jacobi equations in view of weak KAM” 5th Pacific RIM (招待講演) 2010年7月1日, Stanford University, USA
- ㉓ S. Koike “Weak Harnack inequality for fully nonlinear PDEs with unbounded ingredients” Positivity: A key to fully nonlinear equations Conference (招待講演) 2010年6月2日サレルノ, イタリア
- ㉔ J. Sekine “Large deviations controls for long-term investment” Workshop on Risk Measures and Robust Optimization in Finance Nov. 19, 2009 Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore, Singapore (招待講演)
- ㉕ Nagai “Risk-sensitive control, large deviation control and down-side risk minimization” Mathematical finance and related topics related to economics and engineering” Aug. 13, 2009 Kansai Seminar House, Kyoto (招待講演)
- ㉖ J. Sekine “Some asymptotic results for probability maximizing/minimizing portfolios” Congress: Stochastic Analysis for and from Finance Aug. 7, 2009京都市リサーチパーク (招待講演)
- ㉗ H. Nagai “Down-side risk minimization as large deviation control” 1st PRIMA Congress” July 6, 2009 Univ. New South Wales, Sydney, Australia (招待講演)
- ㉘ A. Kohatsu-Higa “Approximations for SDE’s driven by Lévy processes” Third Conference on Numerical Methods in Finance, 2009/4/15 ENPC, Paris, France (招待講演)
- ㉙ 長井 英生 “エルゴードの確率制御から大偏差確率制御へ” -数理ファイナンスに現われる時間大域の問題を巡って

一

日本数学会 総合講演 2009年 3月 27  
日東京大学 (招待講演)

- ③⑩ H. Nagai “Large deviation control arising from optimal investment” Plenary talk at Conference on quantitative methods in finance 2008年 12月 18日 Sydney, Australia (招待講演)
- ③⑪ 関根 順 “数理ファイナンスの現状に関する若干の展望と床制約を置いた長時間ポートフォリオ最適化に関する考察” 日本数学会 特別講演 2008年 9月 24日東京工業大学 (招待講演)
- ③⑫ H. Nagai “Asymptotics of the probability minimizing a downside risk and risk-sensitive dynamic asset allocation under partial information” The fifth Colloquium on BSDEs and Finance, and Applications 2008年 6月 19日Le Mans, France (招待講演)
- ③⑬ J. Sekine “Exponential Indifference Pricing and Hedging with Basis Risk and Partial Information for Conditionally Linear Models” The fifth colloquium on “Backward Stochastic Differential Equations, Finance and Applications” 2008年 6月 19日 Le Mans, France (招待講演)

[図書] (計 1件)

- ① Y. Miyahara “Option pricing in incomplete markets”: Modeling based on geometric Levy processes and minimal entropy martingale measures, Imperial College Press, (2012) pp. 185

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長井 英生 (NAGAI HIDEO)  
関西大学・システム理工学部・教授  
研究者番号: 70110848

### (2) 研究分担者

コハツヒガ アルツォロ (KOHATSU-HIGA ARTURO)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号: 80420412

関根 順 (SEKINE JUN)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号: 50314399

宮原 孝夫 (MIYAHARA YOSHIO)

名古屋市立大学・名誉教授

研究者番号: 20106256

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90205295

石井 仁司 (ISHII HITOSHI)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号: 70102887

畑 宏明 (HATA HIROAKI)

静岡大学教育学部・助教

研究者番号: 00609290

### (3) 連携研究者

会田 茂樹 (AIDA SHIGEKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 90222455

永幡 幸生 (NAGAHATA YUKIO)

新潟大学・大学院・理工学研究科・准教授

研究者番号: 50397725

田村 隆志 (TAMURA TAKASHI)

大阪府立大学・学術研究院・准教授

研究者番号: 50437357

貝瀬 秀裕 (KAISE HIDEHIRO)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授

研究者番号: 60377778