

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2012

課題番号：20340020

研究課題名（和文） 集合論の証明論的研究

研究課題名（英文） Proof-theoretic investigations on set theories

研究代表者

新井 敏康 (ARAI TOSHIYASU)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40193049

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論

1. 研究計画の概要

従来の帰納的巨大順序数の公理系の帰納的順序数による証明論的研究に含まれる技法と構成方法を精査し、それらが当該の帰納的巨大順序数がその帰納的類似物たる巨大基数の証明論的解析に転用できることを、スコーム関数を証明図の解析と順序数の表示の双方に導入することで示していく。これは、対象とする巨大基数が大きくなればなるほど技術的に困難になるであろうが、帰納的巨大順序数の公理系の帰納的順序数による証明論的研究における経験から考えて乗り越えることができない障壁ではない。更に、構成可能性公理 $V=L$ と矛盾する巨大基数（例：可測基数）へと研究対象を広げていく。

2. 研究の進捗状況

帰納的マロ作用素の繰り返しによって反映的順序数の集合論の証明論的強さが近似できることを示した。証明は、証明論的な手法（カット消去）と自分でつくった証明論的順序数の体系の整礎性の当該の集合論内部での実行による。例えば弱コンパクト基数の帰納的類似物であるところの \aleph_3 -反映的順序数の集合論を帰納的マロ作用素の繰り返しで近似するには自然数上の \aleph_1 で定義される整礎的關係に沿って帰納的マロ作用素を繰り返すことが必要かつ十分である。また、 \aleph_4 -反映的順序数については、帰納的マロ作用素を繰り返すべき順序は自然数上のふたつの整礎的順序によって定まるべきの順序になる。このべきを取る回数及び自然数上の整礎的順序の個数が \aleph_{2+n} -反映的順序数なら n 個必要になる。こうして反映的順序数の集合論を証明論的に帰納的マロ作用素の繰り返しで近似するには、1階の自然数論の証明論において順序数構造 ε_0 が現れた (G. Gentzen) ように、同様のべきの繰り返し構造が出現することを突き止めた。さらに直観主義論理に基づく自然数上の不動点に関する公理系がある範囲の論理式に関して直観主義算術の保存拡大であることを

、G. Mintsによるカット消去の本質が整礎的木の Kleene-Brouwer 順序に沿って行われることを用いて示した。また証明論的順序数が分かっている公理系に関して、そこで Δ^0_2 であることが証明できるのは、その集合が Ershov 階層の証明論的順序数以下のレベルに属する事が証明できることと同等であることを示したさらに Zermelo-Fraenkel 集合論で定義できる存在が証明できる可算順序数の上限を与えた。

3. 現在までの達成度

③ やや遅れている

勤務地異動と書籍執筆によるものと思われる。

4. 今後の研究の推進方策

引き続き集合論の証明論的研究を中心課題として鋭意取り組んでいく。昨年度末に弱コンパクト基数の証明論を含む論文を途中まで書き上げた。その後、J. Silver のゼロシャープや解析的集合の決定可能性を考える。これらの課題について将来において研究時間が取れば取り組む。

5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

Toshiyasu Arai, Wellfoundedness proofs by means of non-monotonic inductive definitions II: first order operators, *Annals of Pure and Applied Logic*, vol.162(2010), pp.107-143. 査読有り

Toshiyasu Arai, Intuitionistic fixed point theories over Heyting arithmetic, *Proofs, Categories and Computations*(2010), pp.1-14. 査読有り

Toshiyasu Arai, Iterating the recursively Mahlo operations, Proceedings of the thirteenth International Congress of Logic Methodology, Philosophy of Science(2009), pp.21-35.査読有り

Toshiyasu Arai, Non-elementary speed-ups in logic calculi, Mathematical Logic Quarterly vol. 6(2008), pp. 629-640.査読有り

Akihiro Nozaki, Toshiyasu Arai and Noriko Honda Arai , Polynomial-size Frege proofs of Bollobas' theorem on the trace of sets, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, vol. 84, (2008), pp. 159-161. 査読有り

〔学会発表〕 (計 10 件)

Toshiyasu Arai, Lifting up the proof theory to the countables, Kobe Colloquium on Logic, Statistics and Informatics, 2011年3月30日,神戸大学

Toshiyasu Arai, Wellfoundedness proofs and the bounds on provability in set theories, Oberseminar,, 2010年9月22日, LMU Muenchen

Toshiyasu Arai, Search problems in bounded arithmetics, A Proof Theory Workshop, 2010年3月18日, 慶應義塾大学

Toshiyasu Arai, In germ, Leeds Symposium on Proof Theory and Constructivism, 2009年7月6日, University of Leeds

Toshiyasu Arai, Provably Δ^0_2 and weakly descending chains of ordinals, Eleventh Asian Logic Conference, 2009年6月25日, National University of Singapore

〔図書〕 (計 1 件)

新井 紀子・新井 敏康, 東京図書, 計算とは何か, 2009, 213 頁

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

〔その他〕 <http://researchmap.jp/tosarai/>

○取得状況 (計 0 件)