

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 14 日現在

機関番号：12501
 研究種目：基盤研究(B)
 研究期間：2008～2012
 課題番号：20340020
 研究課題名（和文） 集合論の証明論的研究

研究課題名（英文）
 Proof-theoretic investigations on set theories

研究代表者
 新井 敏康（TOSHIYASU ARAI）
 千葉大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：40193049

研究成果の概要（和文）：主として集合論の公理系を証明論的に研究した。集合論は数学によって立つ基盤であり、そこでの証明を何回、どのような操作を繰り返して分析できるのかを考察した。集合の公理とは集合に関して正しいと現在考えられている命題の集まりを指す。証明は集合論に限らず、数学では欠くことのできない行為である。そのような数学での基礎的な対象について知見を深めた。

研究成果の概要（英文）：I have primarily concerned with proof-theoretic investigations of axioms in set theories. Set theory is the basis of mathematics, and I have investigated proofs in set theory in terms of iterations: the number of iterations and operations. The axiom in set theory is a collection of propositions which are supposed to hold on sets. On the other side proving propositions is an indispensable action in mathematics including set theory. I have acquired knowledge of such foundational objects.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総計	7,000,000	2,100,000	9,100,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論・証明の長さ・集合論の証明論

1. 研究開始当初の背景

D. Hilbert によって無矛盾性証明の手法として創始された証明論の成果は、順序数解析 (ordinal analysis) と呼ばれる一群の結果として定式化されている。

近年、その順序数解析はその対象を、二階算術から集合論の弱い公理系へと転換した。すなわち、巨大基数の帰納的類似物たる帰納的巨大順序数の公理系の証明論的解析である。

そこで得られた技法や構成は、帰納的類似物に留まらず、元々の巨大基数の解析に、必要な変更を加えれば、転用できるはずである。こうして数学基礎論の創まりからその主要な目的であった二分野、すなわち証明の分析による無矛盾性証明を目指した証明論と、集合概念の公理による明確化とそれに続く理論としての集合論、これらの近年の成果と理論的集積を統合する新しい研究構想を得た。

2. 研究の目的

弱コンパクト基数 (weakly compact cardinal)、そして弱コンパクト基数がその一種である記述不能基数 (indescribable cardinal) の公理系を証明論的に解析して、例えば、これらの公理系がマール作用素 (Mahlo operation) を如何様に繰り返せば、記述不能基数の公理系の証明論的な強さをとらえることができるか示す。

このような結果は集合論では考えられてこなかった。弱コンパクト基数が弱マール基数より遥かに大きいこと、それを例えば弱コンパクト基数の下に弱マール基数が定常 (stationary) にある、と表現されてきたが、集合論ではそれ以上踏み込んでこなかった。マール作用素は関数の不動点を取るものなので直観的に理解しやすい。

その繰り返しで巨大基数が捉えられれば、当該の巨大基数の理解に資すると考えられる。

証明論と集合論は数学基礎論での独立した分野であり、現在まで交流が殆どなかった。これらの研究を通して集合論と証明論の接点を探る。

3. 研究の方法

帰納的的巨大順序数の公理系の帰納的順序数による証明論的研究に含まれる技法と構成方法にスコール関数を証明図の解析と順序数の表示の双方に導入する。

可算順序数、あるいは可算集合に関する公理系である ZF の証明論的解析を、その帰納的類似物である無限公理付きの Kripke-Platek 集合論 KP1 の証明論を手本として、得る。このためには W. Buchholz による順序数の集合に集合論でのスコール関数を導入する。言い換えると その集合をスコール関数によって閉じさせないといけない。

他方で集合論 ZF をスコール関数化して、カット消去によって、ある可算順序数まで用いて、それを証明論的に解析する。

このような研究においては既に、用いられる順序数は帰納的ではなく単なる可算であるに過ぎない。また例えばカット消去においても、その証明図の書換えも帰納的でない。

但し ZF について考えるということは弱到達不能基数 (weakly inaccessible cardinal) を考えることになる。つまり、その内部に正則基数を生成する公理が入っており、従って正則基数の範囲を予め限定できず、対応する可算順序数の記述でもそれに応じた正則基数の生成とそれらのつぶしが入れ子になって出現するということである。

4. 研究成果

(1) 以下の雑誌論文 ①において弱コンパクト基数の公理系を証明論的に解析して、この公理系がマール作用素を如何様に繰り返せば、その証明論的な強さをとらえることができるか示した。

(2) 雑誌論文 ②, ⑦, ⑨において「順序数の証明論」の構想と主な結果の概要、帰納的定義による反映的順序数の証明論に必要な順序数体系の整礎性証明、帰納的マール作用素の繰返しによる反映的順序数の証明論的近似について述べた。

(3) 雑誌論文 ③では Δ^1_2 であることが公理系で証明できることとその公理系の証明論的順序数からの弱下降列との関係について論じた。

(4) 雑誌論文 ④, ⑧において直観主義自然数論上での不動点の存在の証明論的強さについて論じた。

(5) 雑誌論文 ⑤において、epsilon 代入列の長さについて論じた。

(6) 雑誌論文 ⑥において Polynomial Local Search を入れ子にすることで一般化して有界算術 T^1_2 での証明できる Π^1_b sentences の特徴付けをした。

(7) 雑誌論文 ⑩において江口直日と共に、指数時間計算可能関数のクラスを生成する関数の規則を与えた。

(8) 雑誌論文 ⑪においていくつかの論理計算の1階論理計算上での初等的ではない加速定理を証明した。

(9) 雑誌論文 ⑫において野崎昭弘、新井紀子と共に、集合の trace に関する Bollobás の定理の Frege system での多項式の長さの証明を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① Toshiyasu Arai, Proof theory of weak compactness, Journal of Mathematical Logic, 査読有, 掲載決定

② Toshiyasu Arai, A sneak preview of proof theory of ordinals, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, 査読有, 20, 2012, pp. 29-47

③ Toshiyasu Arai, Provably Δ_2 and weakly descending chains, 査読有, Proceedings of the 11th Asian Logic Conference, World Scientific, 2012, pp. 1-21

④ Toshiyasu Arai, Quick cut-elimination for strictly positive cuts, 査読有, Annals of Pure and Applied Logic 162, 2011, pp. 807-815.

⑤ Toshiyasu Arai, Exact bounds on epsilon processes, 査読有, Archive for Mathematical Logic, 50, 2011, pp. 445-458

⑥ Toshiyasu Arai, Nested PLS, 査読有, Archive for Mathematical Logic, 50, 2011, pp. 395-409

⑦ Toshiyasu Arai, Wellfoundedness proofs by means of non-monotonic inductive definitions II: first order operators, 査読有, Annals of Pure and Applied Logic, 162, 2010, pp. 107-143

⑧ Toshiyasu Arai, Intuitionistic fixed point theories over Heyting arithmetic, 査読有, Proofs, Categories and Computations, College Publications, 2010, pp. 1-14

⑨ Toshiyasu Arai, Iterating the recursively Mahlo operations, 査読有, Proceedings of the thirteenth International Congress of Logic Methodology, Philosophy of Science, College Publications, 2009, pp. 21-35

⑩ Toshiyasu Arai and Naohi Eguchi, A new function algebra of EXPTIME functions by safe nested recursion, 査読有, ACM Transactions on Computational Logic, 10, 2008, pp. 1-18

⑪ Toshiyasu Arai, Non-elementary speed-ups in logic calculi, 査読有, Mathematical Logic Quarterly, 6, 2008, pp. 629-640

⑫ Akihiro Nozaki, Toshiyasu Arai and Noriko H. Arai, Polynomial-size Frege proofs of Bollobas' theorem on the trace of sets, 査読有, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, 84, 2008, pp. 159-161

[学会発表] (計 21 件)

① Toshiyasu Arai, Predicatively computable functions on hereditarily finite sets, the 3rd Workshop on Proof Theory and Rewriting, Mar. 6, 2013, 金沢県立美術館

② Toshiyasu Arai, Π_1^n -indecidabilities in proof theory, Computability Theory and Foundations of Mathematics, Feb. 19, 2013, 東京工業大学

③ Toshiyasu Arai, Proof theory of set theories beyond ZF, Stanford Logic Seminar, Sep. 4, 2012, Stanford University, USA

④ Toshiyasu Arai, Proof theoretic bounds of set theories, Logic Colloquium 2012, Jul. 12, 2012, University of Manchester, UK

⑤ Toshiyasu Arai, Bounds on provability in set theories, Workshop on proof theory and computability theory 2012, Feb. 21, 2012, 晴海グランドホテル

⑥ Toshiyasu Arai, Searching witnesses of Σ_2 -formulas in proofs, 東北大学ロジックセミナー, Dec. 26, 2011, 東北大学

⑦ 新井 敏康, はじめての数学基礎論, 日本数学会企画特別講演, 平成 23 年秋季総合分科会, Sep. 28, 2011, 信州大学

⑧ Toshiyasu Arai, Two contributions in proof theory on sets, Workshop on proof theory and theory of computing, 2011, Sep. 13, 2011, 首都大学

⑨ Toshiyasu Arai, Lifting up the proof theory to the countables, Kobe Colloquium on Logic, Statistics and Informatics, Mar. 30, 2011, 神戸大学

⑩ Toshiyasu Arai, Quick cut-elimination in intuitionistic logic calculi, Workshop on Proof Theory and Computability Theory, Feb. 23, 2011, 秋保温泉

⑪ Toshiyasu Arai, Search problems in T^2 , 東北大学ロジックセミナー, Jan. 21, 2011, 東北大学

⑫ 新井 敏康, Ω_1 の証明論, 神奈川大学集合論セミナー, Nov. 13, 2010, 神奈川大学

⑬ Toshiyasu Arai, Mini-course on proof theory, LMU MÜNchen, Sep. 27-29, 2010, MÜNchen, Germany

⑭ Toshiyasu Arai, Wellfoundedness proofs and the bounds on provability in set theories, Oberseminar, LMU MÜNchen, Sep. 22, 2010, MÜNchen, Germany

⑮ Toshiyasu Arai, Search problems in bounded arithmetics, A Proof Theory Workshop, Mar. 18, 2010, 慶應大学

⑯ 新井 敏康, 集合論の証明論へ, 神奈川大学集合論セミナー Feb. 22, 2010, 神奈川大学

⑰ Toshiyasu Arai, In germ, Leeds Symposium on Proof Theory and Constructivism, EPSRC Workshop, July 6, 2009, Leeds University, UK

⑱ Toshiyasu Arai, Provably Δ^1_2 and weakly descending chains of ordinals, Eleventh Asian Logic Conference, Jun. 25, 2009, National University of Singapore, Singapore

⑲ 新井 敏康, Intuitionistic fixed point theories, 日本数学会年会, Mar. 26, 2009, 東京大学

⑳ 野崎 昭弘, 新井 敏康, 新井 紀子, Polysize Frege proofs of Bollobás' theorem, 日本数学会年会, Mar. 26, 2009, 東京大学

㉑ Toshiyasu Arai, Proofs and sets, International Workshop on Constructivism: Logic and Mathematics, May 28, 2008, 金沢

[図書] (計 2 件)

① 新井敏康, 岩波書店, 数学基礎論, 2011, 550

② 新井紀子・新井敏康, 東京図書, 計算とは何か, 2009, 224

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :

種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等
<http://researchmap.jp/tosarai>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新井 敏康 (TOSHIYASU ARAI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 40193049

(2) 研究分担者 ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ()

研究者番号 :