

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 30 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2012

課題番号：20340022

研究課題名（和文）

配置の幾何とハイパーグラフの極値組合せ論

研究課題名（英文）

Discrete geometry and extremal combinatorics of hypergraphs

研究代表者

徳重 典英（TOKUSHIGE NORIHIDE）

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：00217481

研究成果の概要（和文）：

我々は、配置の幾何とハイパーグラフの極値組合せ論に関する具体的な課題に対して、幾何学的方法と組合せ論的方法の双方を用い、さらに確率論的手法や数論からの応用も援用しながら研究した。その結果、「ユークリッド空間における球面配置」、「高次元立方体に含まれる大きな正則単体」、「 $t$  交差族に関する Erdos-Ko-Rado 型定理の拡張」、「平面フレーム、あるいは円形フレームに捕捉される凸体」等のテーマについて成果を得た。

研究成果の概要（英文）：

We studied some concrete problems in discrete geometry and extremal combinatorics using tools coming from different branches of mathematics. We have obtained results on "sphere-systems in Euclidean spaces," "large regular simplices contained in a hypercube," "extension of the Erdos-Ko-Rado theorem on  $t$ -intersecting families," "convex bodies fixed by planar frames," and so on.

交付決定額

（金額単位：円）

|         | 直接経費      | 間接経費      | 合計        |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 2008 年度 | 1,600,000 | 480,000   | 2,080,000 |
| 2009 年度 | 1,000,000 | 300,000   | 1,300,000 |
| 2010 年度 | 1,000,000 | 300,000   | 1,300,000 |
| 2011 年度 | 1,200,000 | 360,000   | 1,560,000 |
| 2012 年度 | 1,000,000 | 300,000   | 1,300,000 |
| 総計      | 5,800,000 | 1,740,000 | 7,540,000 |

研究分野：組合せ論

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：組合せ論、極値組合せ論、ハイパーグラフ、極値集合論、離散幾何

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始時までに、徳重は主に極値集合論の立場から、前原は主に離散幾何学の立場から極値組合せ論について研究していたが、球面配置に関する共同研究等を通して、双方の研究手法や問題意識を共有することで、より広い範囲の極値組合せ論の問題に取り組めることがわかりつつあった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、配置の幾何とハイパーグラフの極値組合せ論に関する具体的な課題に対して、幾何学的方法と組合せ論的方法の双方を用い、さらに確率論的手法や数論からの応用も援用しながら研究することであった。同時に、証明手法そのものに関する研究も行った。

### 3. 研究の方法

設定した具体的問題に対して、徳重と前原との共同研究、それぞれ単独での研究、あるいは他の研究者との共同研究を行い、得られた結果をフィードバックしながら結果の精密化、一般化などを目指した。次項にあるように成果については論文でも研究集会でも積極的に発表した。研究集会における情報収集や、他の研究者との議論が研究を進展させる有効な手段となった。

### 4. 研究成果

本研究課題でこれまでに得られた具体的成果について述べる。

(1) ユークリッド空間における球面配置に関して研究した。得られた成果を *European Journal of combinatorics* で発表し、ハンガリーでおこなわれた研究集会で報告した。(論文番号 18、発表番号 39)

(2) 平面における Wallace と Miquel の定理を高次元に拡張する研究をおこなった。得られた結果を *Journal of Geometry* で発表した。(論文 21)

(3) 凸な壁穴を通過する凸体の性質を研究した。これをきっかけに、高次元立方体に含まれる大きな正則単体について Imre Ruzsa 氏と共同研究をおこない、その成果を *Periodica Math. Hungarica* で発表した。また穴が球体の場合についてはより厳密な成果を得て、*Geometriae Dedicata* で発表した。これらについては神戸学院大学、韓国、ドイツ、ロシア、東京工業大学、慶応大学、龍谷大学、京都大学、ハンガリーでおこなわれた研究集会で報告した。(論文 14, 20、発表 19, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 38)

(4) 平面フレームによって捕捉あるいは固定される凸体について研究した。一部は Imre Barany 氏との共同研究である。また正多面体のくびれについても研究した。凸多面体のくびれとは、その部分に円形の輪を掛けて抜けないようにできる部分のことを言う。成果については、*Computational Geometry, Graphs and Combinatorics*、*Journal of Geometry* で発表し、龍谷大学、京都大学、中国、ドイツ、カナダで行われた研究集会で報告した。(論文 5, 7, 9、発表 8, 9, 11, 18, 20, 36)

(5) Erdos-Ko-Rado 型の定理を拡張する研究をおこなった。特に  $r$  重に  $t$  交差する集合族、あるいは  $r$  個の横断的  $t$  交差族について詳しく調べた。その一部は Mark Siggers 氏、Peter Frankl 氏との共同研究による。得られた結果は、*Journal of Combinatorial theory (A)*、*Discrete Mathematics*、*Combinatorics*、*Probability & Computing* 等で発表し、龍谷大学、京都大学でおこなわれた研究集会で報告した。(論文 1, 6, 8, 12, 19, 22, 23、発表 15, 17)

(6) ハイパーグラフから得られる包含行列のランクを調べる研究を Peter Frankl 氏と行い、交差族に関する結果の  $q$  類似を与えた。成果は論文にまとめて現在投稿中であり、龍谷大学、ハンガリーで行われた研究集会で報告した。(発表 7, 12)

(7) グラフの隣接行列の固有値から独立数を評価する方法を交差族のサイズ評価に応用する研究を開始した。成果の一部は論文にまとめて現在投稿中であり、名古屋大学、龍谷大学、韓国で行われた研究集会で報告した。(発表 1, 2, 3, 4)

(8) 超平面配置の応用としてランキングパターンを数え上げる問題について竹村彰通氏、紙屋英彦氏と共同研究をおこなった。成果は *Advanced Studies in Pure Mathematics* で発表し、高知大学、韓国、ドイツで行われた研究集会で報告した。(論文 2、発表 10, 22, 23)

(9) サイクル補題の拡張を利用して格子経路を数え上げる問題に関して中上川友樹氏と共同研究をおこなった。成果は *SIAM J. Discrete Math* で発表し、ハンガリーで行われた研究集会で報告した。(論文 3、発表 13)

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

① M. Siggers, N. Tokushige. The maximum size of intersecting and union families of sets. *European J. Combin.* 33 (2012) 128-138. 査読有  
10.1016/j.ejc.2011.08.004

② H. Kamiya, A. Takemura, N. Tokushige. Application of arrangements theory to unfolding models. *Adv. Stud. Pure. Math.* 62 (2012) 399-415. 査読有

③ T. Nakamigawa, N. Tokushige. Counting lattice paths via a new cycle lemma. *SIAM J. Discrete Math.* 26 (2012) 745-754. 査読有 10.1137/100796431

④ H. Maehara. Holding a regular pyramid by a circle. *Journal of Geometry.* 102 (2012) 133-147. 査読有  
10.1007/s00022-012-0104-8

⑤ I. Barany, H. Maehara, N. Tokushige. Tetrahedra passing through a triangular hole, and tetrahedra fixed by a planar frame. *Computational Geometry* 45 (2012) 14-20. 査読有

10.1016/j.comgeo.2011.07.004

- ⑥P.Frankl, N.Tokushige. On  $r$ -cross intersecting families of sets. *Combinatorics, Probability & Computing*, 20 (2011) 749-752. 査読有  
10.1017/S0963548311000289
- ⑦H.Maehara, N.Tokushige. Classification of the Congruent Embeddings of a Tetrahedron into a Triangular Prism. *Graphs and Combinatorics* 27 (2011) 451-463. 査読有 10.1007/s00373-011-1016-3
- ⑧N.Tokushige. A product version of the Erdos-Ko-Rado theorem. *J. Comb. Theory (A)*, vol 118 (2011) 1575-1587. 査読有
- ⑨H.Maehara. On the diameter of a circle to hold a cube. *Lecture notes in computer science*. 7033 (2011) 147-153. 査読有 10.1007/978-3-642-24983-9\_15
- ⑩T.Kuwata, H.Maehara. Lattice points on similar figures and conics. *Graphs and Combinatorics*. 27 (2011) 441-450. 査読有 10.1007/3373-011-1015-4
- ⑪H.Maehara. On a proper acute-triangulation of a polyhedral surface. *Discrete Math*. 311 (2011) 1903-1909. 査読有 10.1016/j.disc.2011.05.012
- ⑫ S.V.Gervacio, H.Maehara. A note on lights out puzzle: parity-state graphs. *Graphs and Combinatorics*. 27 (2011) 109-119. 査読有
- ⑬ N.Tokushige. On cross  $t$ -intersecting families of sets. *J. Comb. Theory (A)* 117 (2010) 1167-1177. 査読有
- ⑭H.Maehara, N.Tokushige. Regular simplices passing through holes. *Geometriae Dedicata*, 145 (2010) 19-32. 査読有
- ⑮H.Maehara. On a sphere that passes through  $n$  lattice points. *European J. Combin.* 31 (2010) 617-621. 査読有
- ⑯H.Maehara. On congruent embeddings of a tetrahedron into circular cylinder. *Yokohama Math. J.* 55 (2010) 171-177. 査読有
- ⑰ H.Maehara. Reversing a polyhedral

surface by origami-deformation. *European J. Combin.* 31 (2010) 1171-1180. 査読有

- ⑱H.Maehara, N.Tokushige. From line-systems to sphere-systems --- Schlafli's double six, Lie's line-sphere transformation, and Grace's theorem. *European J. Comb.* 30 (2009) 1337-1351. 査読有
- ⑲ N.Tokushige. A multiply intersecting Erdos-Ko-Rado theorem --- the principal case. *Discrete Math*. 310 (2009) 453-460. 査読有
- ⑳ H.Maehara, I.Z.Ruzsa, N.Tokushige. Large regular simplices contained in a hypercube. *Periodica Math. Hungarica*. 58 (2009) 121-126. 査読有
- ㉑ H.Maehara, N.Tokushige. Wallace's theorem and Miquel's theorem in higher dimensions. *Journal of Geometry*, 95 (2009) 69-72. 査読有
- ㉒N.Tokushige. The random walk method for intersecting families, in *Horizons of combinatorics*, Bolyai society mathematical studies. 17 (2008) 215--224. 査読有
- ㉓ N.Tokushige. Brace-Daykin type inequalities for intersecting uniform families. *European J. of Comb.* Vol 29 (2008) 273-285. 査読有
- ㉔ S.V.Gervacio, Y.F.Lim, H.Maehara. Planar unit-distance graphs having planar unit-distance complement. *Discrete Math*. 308 (2008) 1973-1984. 査読有
- [学会発表] (計 49 件)
- ① N.Tokushige. The ratio bound and intersecting families. 代数的グラフ理論、スペクトラルグラフ理論および周辺領域. 2013/01/05 名古屋大学(名古屋)
- ②徳重典英. グラフの第二固有値とその交差族への応用. 応用数学合同研究集会. 2012/12/21 龍谷大学(滋賀県大津市)
- ③N.Tokushige. The eigenvalue method for intersecting families. The 2nd Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications. 2012/11/10 Nagoya Univ.

④N.Tokushige. Hoffman's bound for cross intersecting families. 53rd KPPY combinatorics workshop. 2012/08/07 Kyungpook National University (Korea)

⑤N.Tokushige. An optimal coloring from a body of revolution. ESF research conference on perspectives in discrete mathematics. 2012/6/26 Centre de Recerca Mathematica (Spain)

⑥前原潤. Bend-formulas in some sphere-systems. 離散数学一日研究会. 2012/6/23 東京理科大学

⑦徳重典英. 包含行列のランクと交差族の  $q$  類似. 応用数学合同研究会. 2011/12/17 龍谷大学(滋賀県大津市)

⑧H.Maehara. Necks of regular polyhedra. Japan conference on discrete and computational geometry. 2011/11/28 東海大学(東京)

⑨H.Maehara. To hold a convex body by a frame. Workshop on Rigidity. 2011/10/11 Fields Institute (Canada)

⑩ N.Tokushige. Counting the number of ranking patterns. MFO workshop on Discrete Geometry. 2011/9/8 MFO (Germany)

⑪H.Maehara. To hold a convex body by a circle. MFO workshop on Discrete Geometry. 2011/9/5 MFO (Germany)

⑫ N.Tokushige. Katona's  $t$ -intersection theorem and some related results. Katona 70 conference. 2011/9/4 Renyi Institute (Hungary)

⑬N.Tokushige. Counting lattice paths via cycle lemma. EuroComb 2011. 2011/9/1 Eotvos Univ. (Hungary)

⑭徳重典英. 完全グラフの 2 着色、単峰列、ヤング図形、回転体体積. 離散数学とその応用研究会 2011. 2011/07/31 奈良文化会館(奈良)

⑮N.Tokushige. Some results and problems concerning cross-intersecting families. The 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications. 2011/06/03 京都大学(京都市)

⑯徳重典英. フレームで凸体をつかむ.

第 6 回組合せゲーム・パズル ミニ研究会. 2011/03/10 京都大学(京都市)

⑰徳重典英. 多重交差族の和積と相加相乗不等式. 応用数学合同研究会. 2010/12/17 龍谷大学(滋賀県大津市)

⑱前原潤. 凸体に輪を嵌める. 応用数学合同研究会. 2010/12/16 龍谷大学(滋賀県大津市)

⑲徳重典英.  $n$  次元立方体の中の大きな  $n$  次元正則単体 その 2. Hadamard 行列とそれに関係する代数的組合せ論. 2010/12/12 神戸学院大学 (神戸)

⑳H.Maehara. On the diameter of a circle to hold a cube. The China-Japan Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications. 2010/11/6 Dalian(China)

㉑前原潤. On a proper acute triangulation of a polyhedral surface. 離散数学とその応用研究会 2010. 2010/8/1 高知大学 (高知)

㉒徳重典英. ランキングパタンの数え上げ. 離散数学とその応用研究会 2010. 2010/7/31 高知大学 (高知)

㉓ N.Tokushige. Counting the number of ranking patterns. International conference on Algebraic and Geometric Combinatorics 2010. 2010/7/16 Hotel Concorde Gyeongju (Korea),

㉔前原潤. Lattice points on conics. 第 27 回代数的組合せ論シンポジウム 2010/6/21 高知大学

㉕H.Maehara. On a proper acute triangulation of a polyhedral surface. Third Texas Southmost Geometry and Topology Conference. 2010/4/15 テキサス大学(米国)

㉖徳重典英.  $n$  次元立方体の中の大きな  $n$  次元正則単体. 代数的組合せ論ミニ研究会 in 神戸 2010/3/16 神戸学院大学 (神戸)

㉗ N.Tokushige. Large regular simplices contained in a hypercube. Graph Theory Seminar. 2010/2/18 Kyungpook National University(Daegu, South Korea)

㉘徳重典英. 離散幾何の話題から 応用数学合同研究会合同セッション 2009/12/18 龍谷大学

⑳ H. Maehara. On holes through which a regular simplex can go. 11th International conference on discrete mathematics: convexity and discrete geometry 2009/7/27 Dortmund (Germany)

㉑ H. Maehara, On a triangular hole through which a tetrahedron can go. Discrete Geometry and Statistics of Configurations. 2009/6/2 Steklov Math. Inst. Moscow (Russia)

㉒ H. Maehara. Reversing polyhedral surfaces by origami-deformation. International conference on graph theory and combinatorics 2009. 2009/4/24 Manila (Philippine)

㉓ 徳重典英. 正四面体が通過できる小さな壁穴、およびその高次元版. 第4回組合せゲーム・パズル研究集会. 2009/3/3 東工大(東京都目黒区)

㉔ H. Maehara. Steinhaus' problem and its variation in planar lattices. SYM Symposium 2009/2/20 統計数理研究所(東京)

㉕ N. Tokushige. Large regular simplices contained in a hypercube. 第5回組合せ論若手研究集会. 2009/2/4 慶応義塾大学(横浜)

㉖ 徳重典英. 壁穴を通過する正四面体、およびその高次元版. 応用数学合同研究集会. 2008/12/16 龍谷大学(瀬田)

㉗ N. Tokushige. Convex bodies passing through holes. Kyoto RIMS workshop on computational geometry and discrete mathematics. 2008/10/17 京都大学数理解析研究所(京都)

㉘ 徳重典英. ミニマルジャグリング. 組合せ論サマースクール 2008. 2008/09/08 沖縄健康文化村フェストーネ(沖縄)

㉙ N. Tokushige. A regular tetrahedron passes through a hole smaller than its face. Fete of Combinatorics and Computer Science. 2008/08/12 Keszthely (Hungary)

㉚ H. Maehara. From line-systems to sphere-systems. Intuitive geometry in Memoriam Laszlo Fejes. 2008/7/2 Renyi Institute, Budapest (Hungary)

〔図書〕(計1件)

① 前原潤、桑田孝泰、共立出版、知っておきたい幾何の定理、2011、167

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

徳重典英 (TOKUSHIGE NORIHIDE)  
琉球大学・教育学部・教授  
研究者番号: 00217481

### (2) 研究分担者

前原潤 (MAEHARA HIROSHI)  
琉球大学・その他部局等・名誉教授  
研究者番号: 60044921

### (3) 連携研究者

なし

### (4) 研究協力者

Peter Frankl, Imre Ruzsa, Imre Barany,  
Mark Siggers, Severino Gervacio,  
中上川友樹、竹村彰通、紙屋英彦、  
桑田孝泰