

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 27 日現在

機関番号：12703

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20340024

研究課題名（和文） 凸最適化の情報幾何：展開と応用

研究課題名（英文） Information Geometry of Convex Optimization:
Extension and Applications

研究代表者

土谷 隆 (TSUCHIYA TAKASHI)

政策研究大学院大学・政策研究科・教授

研究者番号：00188575

研究成果の概要（和文）：半正定値計画問題および対称錐計画問題に対し、主双対内点法の反復回数が中心曲線上の情報幾何的積分で近似的に表現できることを理論的に示し、近似が非常によくあてはまることを、実用規模の問題に対する数値実験を通じて確認した。また、世界最大規模の 34300 次元の大規模ガウシアングラフィカルモデルの求解に成功した。大規模ガウシアングラフィカルモデル推定のための主双対内点法も開発した。悪条件の半正定値計画問題に対する正則化や面縮小法等の研究を実施した。

研究成果の概要（英文）：Interior-point algorithms for semidefinite programs and symmetric cone programs are analyzed in view of information geometry to show that the iteration complexity of primal-dual interior-point algorithms is approximately represented as an information geometric integral over central trajectory. Through extensive numerical experiments we demonstrated that the integral very accurately predicts iteration-complexity of interior-point algorithms. One of the largest Gaussian graphical models in the world are successfully solved with super computer. Primal-dual interior-point algorithms for large-scale Gaussian graphical models are developed. Regularization and facial reduction approaches for ill-conditioned semidefinite programs are developed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2009 年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2010 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
年度			
年度			
総計	7,200,000	2,160,000	9,360,000

研究分野：

科研費の分科・細目：

キーワード：凸最適化・情報幾何・内点法・数理計画・計算複雑度・制御理論

1. 研究開始当初の背景

この 10 年あまりの間に、最適化の世界では、多項式時間内点法によって、半正定値計画問題や 2 次錐計画問題など、新しい凸

最適化問題が解けるようになり、制御や信号処理、学習理論、最適設計、量子化学等の分野における強力なモデリングの道具として応用が広がりつつある。一方、情報幾

何は、統計科学、学習理論、情報理論、統計力学、信号処理などの諸分野に適用され、さまざまな情報の数理的理論における、有効な接近法として定着している。情報幾何は、凸関数によって定義されたポテンシャルより定まる、2つの双対な接続を基本的な構造とする微分幾何学的構造である。一方、凸最適化は凸集合上での凸関数の最小化問題である。双対性や

共役関数などいくつかの重要な概念を共有しているにもかかわらず、凸最適化の情報幾何に関する研究は、概念的な親和性から期待されるほどには進展していない。特に、1980年代後半、研究代表者の土谷は田邊とともに、情報幾何と線形計画法における内点法の間に興味深い関係を指摘したが、必ずしも新

たな数学的理論の展開にはつながらなかった。土谷と分担者の小原により、凸最適化の計算複雑度を情報幾何学的な曲率と結びつける新しい研究(A. Ohara and T. Tsuchiya: An information geometric approach to polynomial-time interior-point algorithms: complexity bound via curvature integral, Manuscript, November 2007)により、凸最適化の情報幾何を通じ、問題の幾何学的複雑さと計算の複雑さを結びつける端緒が得られつつあった。

2. 研究の目的

本研究は、標記の論文に基づいて、凸最適化の情報幾何を展開し、情報と幾何を結びつける新しい方法論を確立し、その応用を図ることを目的としたものである。特に、

- (1) 対称錐計画問題に対する主双対内点法の情報幾何的構造の解明
- (2) 情報幾何による数値的に頑健で優れた内点法の開発
- (3) 情報幾何的接近法による大規模グラフィカルガウシアンモデル推定への挑戦

を目的として研究を行った。

3. 研究の方法

特に、小原・土谷・柿原が(1)について、村松・土谷が(2)について、(3)福田・土谷が(3)について研究を進めた。

4. 研究成果

各部分課題別に研究成果について述べる。

- (1) 対称錐計画問題に対する主双対内点法の情報幾何的構造の解明

小原・土谷において導入された、凸最適化問題の情報幾何では、自己整合障壁関数による内点法の反復回数が情報幾何における埋め込み曲率によって表現されること、そして、線形計画問題においては、主双対内点法の反復回数を表現する量として知られてい

た中心曲線上の積分が、中心曲線の主問題の多様体と双対問題の多様体への埋め込み曲率の間に成立する「ピタゴラス関係」を用いて表現できることを明らかにした。

本研究では、半正定値計画問題や対称錐計画問題について、まず、主双対内点法の反復回数を表現する中心曲線上の積分を求め、「ピタゴラス関係」を拡張することにより、得られた被積分関数を情報幾何的に表現することにより、線形計画問題の場合に得られた、反復回数の情報幾何的表現を、半正定値計画問題、さらに、対称錐計画問題に拡張した。さらに、数千変数から数万変数の大規模線形計画問題、半正定値計画問題に対して本格的な数値実験を行い、主双対内点法の反復回数が、中心曲線上の情報幾何的積分により、精度良く近似できることを実験的に確かめた。この結果は、内点法の反復回数が、実用的なレベルで微分幾何学的量として表現できることを明らかにした点で、興味深いものである。これらの成果は、

S. Kakahara, A. Ohara, T. Tsuchiya: Information geometry and interior-point algorithms in SDP and symmetric cone programs, September 2011.

S. Kakahara, A. Ohara, T. Tsuchiya: Curvature integrals and iteration complexities in SDP and symmetric cone programs, September 2011.

にまとめられ、現在審査中である。関連して、エスコート確率や q -分布の情報幾何に関する研究も行った。

- (2) 情報幾何による数値的に頑健で優れた内点法の開発

悪条件の半正定値計画問題の例として、一般化 GKYP 補題によるフィルタ設計問題を取りあげ、解析することを試みた。問題を Image 表現から Kernel 表現に変更することで、安定して問題を解くことができることが判明した。また、正則条件を満たさないこの問題に対し、問題を摂動して正則化を行って解くことが有効であることが示唆された。また、面縮小法の研究を行った。

- (3) 情報幾何的接近法による大規模グラフィカルガウシアンモデル推定への挑戦

海洋データ同化に現れる大規模グラフィカルガウシアンモデルの推定に取り組んだ。この問題は、半正定値計画問題の中心曲線を求める問題として定式化できる。内点法によって最適化を行い、世界最大規模の 101,310 パラメータ、分散共分散行列のサイズが $34,300 \times 34,300$ のグラフィカルガウシアンモデルを推定することに成功した。また、分散共分散行列のサイズ $8,585 \times 8,585$ のグラフィカルガウシアンモデルについて、近傍を変化させて 150,381 変数までのモデルの情報量規準を計算してモデル間の比較を行い、適

切なモデルを選択することができた。大規模問題をより効率的に解くために、部分的に射影を行って問題を最適化する手法についても検討した。また、一般的な構造のガウシアングラフィカルモデルに対する主双対内点法の開発を行った。

部分課題(2), (3)については、一定の成果が得られたとはいえ、問題の情報幾何的構造をより生かした解析に向けて、さらに研究を進めることが今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

[1] M. Yamashita, K. Fujisawa, M. Fukuda, K. Nakata, and M. Nakata: Parallel solver for semidefinite programming problem having sparse Schur complement matrix. To appear in ACM Transactions on Mathematical Software.

[2] Atsumi Ohara, Hiroshi Matsuzoe and Shun-ichi Amari: Conformal geometry of escort probability and its Applications. Modern Physics Letters B, Vol.26 (2012), No. 10, 1250063.

[3] M. Yamashita, K. Fujisawa, M. Fukuda, K. Kobayashi, K. Nakata, and M. Nakata: Latest developments in the SDPA family for solving large-scale SDPs. in Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization, M. F. Anjos and J. B. Lasserre, eds., (Springer, New York, 2012), pp. 687-713.

[4] Hayato Waki, Masakazu Muramatsu: An extension of the elimination method for a sparse SOS polynomial. Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 54(2011/12), pp. 161-190.

[5] Shun-ichi Amari and Atsumi Ohara: Geometry of q-exponential family of probability distributions. Entropy, Vol.13 (2011), 1170-1185.

[6] Atsumi Ohara and Tatsuaki Wada: Information geometry of q-Gaussian densities and behaviors of solutions to related diffusion equations. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 43 (2010), 035002(18pp).

[7] Hayato Waki and Masakazu Muramatsu: A facial reduction algorithm for finding sparse SOS representations. Operations Research Letters, Vol. 38 (2010), pp. 361-365.

[8] Tomonari Kitahara and Takashi

Tsuchiya: Proximity of weighted and layered least squares solutions, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol.31 (2009), No. 3, pp.1172-1186.

[9] Genta Ueno and Takashi Tsuchiya: Covariance regularization in inverse space, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Vol.135 (2009), Iss. 642, pp.1133-1156.

[10] Atsumi Ohara: Geometric study for the Legendre duality of generalized entropies and its application to the porous medium equation. European Physical Journal B, Vol.70 (2009), pp.15-28.

[11] H.Waki, M. Muramatsu and M. Kojima: Invariance under affine transformation in semidefinite programming relaxation for polynomial optimization problems, Pacific Journal of Optimization, Vol.5 (2009), pp.297-312.

[12] Hayato Waki and Sunyoung Kim and Masakazu Kojima and Masakazu Muramatsu and H. Sugimoto: SparsePOP: a sparse semidefinite programming relaxation of polynomial optimization problems. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 35 (2008), pp.2-12.

[学会発表] (計 13 件)

[1] A. Ohara, S. Kakiyama and T. Tsuchiya: Study of iteration-complexity for the central trajectory via curvature of information geometry. INFORMS 2011, Charlotte, NC, USA, November, 2011.

[2] Takashi Tsuchiya: Information geometry, interior-point algorithms and graphical modeling. Long Term Workshop: Mathematical Sciences and their Applications. Kamisawa, Nagano, Japan, September 10, 2010.

[3] Hiroshi Matsuzoe and Atsumi Ohara, Geometry for q-exponential families. 2nd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, Veliko Tarnovo, Bulgaria, September 6-10, 2010.

[4] Satoshi Kakiyama, Renato Monteiro, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya: Information geometric approach to interior-point algorithms in LP and SDP. International Symposium on Mathematical Programming, Chicago, August 2009.

[5] Atsumi Ohara, Hiroshi Matsuzoe and Shun-ichi Amari: A dually flat structure on the space of escort distributions,

Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their Applications, Kyoto, July 7-9, 2009.

[6] Hayato Waki and Masakazu Muramatsu: A Facial reduction algorithm for semidefinite programming problems in polynomial optimization. International Symposium on Mathematical Programming, Chicago, August 2009.

[7] Masakazu Muramatsu and Hayato Waki: Facial reduction algorithm and conic expansion algorithm. International Symposium on Mathematical Programming, Chicago, August 2009.

[8] M. Fukuda: On the implementation of the primal-dual interior-point method for semidefinite programs with log-determinants, 20th International Symposium on Mathematical Programming (ISMP), Chicago IL, USA, August 27, 2009.

[9] Atsumi Ohara and Tatsuaki Wada: Geometric aspects of a certain type of nonlinear diffusion equations, International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Budapest, August 7-10, 2008.

[10] Hayato Waki and Masakazu Muramatsu: Strange behaviors of interior-point methods for solving semidefinite programming problems in polynomial optimization, 10th International Workshop on High Performance Optimization Techniques, June 2008.

[11] M. Fukuda: Applications of semidefinite programs with log-determinant terms. SIAM Conference on Optimization, Boston MA, USA, May 10, 2008.

[12] Takashi Tsuchiya and Atsumi Ohara: An information geometric approach to polynomial-time interior-point algorithms: complexity bound via curvature integral. SIAM Conference on Optimization, Boston MA, USA, May 11, 2008.

[13] Tomonari Kitahara and Takashi Tsuchiya: A simple variant of the MTY-PC algorithm and its objective-function-free polynomial-time convergence for bounded LPs. SIAM Conference on Optimization, Boston MA, USA, May 10, 2008.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土谷 隆 (TSUCHIYA TAKASHI)
政策研究大学院大学・政策研究科・教授
研究者番号：00188575

(2) 研究分担者

小原 敦美 (OHARA ATSUMI)
福井大学・工学研究科・教授
研究者番号：90221168
村松 正和 (MURAMATSU MASAKAZU)
電気通信大学・情報理工学研究科・教授
研究者番号：70266071
福田 光浩 (FUKUDA MITUHIRO)
東京工業大学・情報理工学研究科・准教授
研究者番号：80334548