

## 自己評価報告書

平成23年 4月20日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2012

課題番号：20340028

研究課題名（和文） 完全WKB解析に拠る高階パルヴェ方程式の構造論

研究課題名（英文） The theory of structure of higher order Painlevé equations that is based on the exact WKB analysis

研究代表者

河合 隆裕 (KAWAI TAKAHIRO)

京都大学・数理解析研究所・名誉教授

研究者番号：20027379

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：高階パルヴェ方程式・完全WKB解析・変わり点・単純極作用素・超局所解析学

## 1. 研究計画の概要

- (1) 手段としての完全WKB解析を理論的に進展させることにより、
- (2) 対象である高階パルヴェ方程式の構造の理解を深める。

その過程において

- (3) 完全WKB解析と超局所解析学の交錯点を具体的に探る。

## 2. 研究の進捗状況

(1) 計画(1)について：研究対象として当初考えていた“変わり点2個のシュレーディンガー作用素”，と云う枠組（論文④）を，次のように考えることにより大きく拡張することに成功した：WKB解の特異性に与える影響を云う観点からは“単純極”は“単純変わり点”と類似の役割を完全WKB解析において果たす。そこでまず“単純変わり点1個，単純極1個が合流する方程式”にも議論が拡張できることを示し（論文③），さらに“単純変わり点1個，単純極2個”の場合に挑戦し，その標準型がマシュー方程式により与えられることを証明，同時に具体的にWKB解のalien derivativeを超局所解析的手法に拠り求めることも（マシュー方程式そのものの解析は難しいので）“単純変わり点を遠くに追い出す”と云う新手法を導入することにより成功している。（現在論文執筆中）

(2) 計画(2)について：高階パルヴェ方程式  $(P_J)_m$  ( $J = I, II, IV; m = 1, 2, \dots$ ) の1型変わり点の近くでは，任意のインスタント解が古典的2階I型パルヴェ方程式  $(P_I)_1$  の解に変換されることを証明した。（論文②）その“変換”の構成には  $(P_J)_m$  をその

両立条件とする連立線型偏微分方程式系  $((SL_J)_m$  及び  $(D_J)_m$ ) のWKB解析的変換を用いる。

(3) 計画(3)について：対象となるシュレーディンガー作用素に余分のパラメータ  $t$  を導入して，“遠く離れたfixed singularity”でWKB解のalien derivativeの計算を（パラメータ  $t$  を動かすことにより）遂行することに成功（論文③，④；ここでは論文①，⑤で得られた結果が有効に用いられる）すると共に，大きなパラメータを含む2階線型常微分方程式のWKB解がボレル総和可能であることを連繫研究者 小池達也（神戸大学）が示し（論文準備中），超局所解析的手法を完全WKB解析に適用する為の基礎を確立した。

## 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

前項で記したように計画(1)，(2)については順調に結果が得られている。計画(3)については当初期待していなかった“ボレル総和可能の証明”が与えられたと云う点で当初計画以上の進展があった。但し次項で記すように，これは本研究課題の当初目標の1つ“完全WKB解析の最高の教科書を執筆する”と云う課題を達成する為に新たな努力を要することを意味する。謂わば“嬉しい悲鳴”ではあるけれど，“山が高くなったせいで，九合目迄登ったつもりが八合目と云うことになってしまった”と云う側面もあり①とはしなかった。

#### 4. 今後の研究の推進方策

2階線型の方程式に対し、そのWKB解、及び標準型への変換函数のボレル総和可能性が証明されたことにより、研究課題を一層魅力的かつ重要なものとするのが可能になったと考える。例えば計画(2)に関しては、まず手始めとして古典的なパンルヴェ方程式の解のボレル総和可能性が問題として当然意識されて来るし、計画(1)に関してはさらに“resurgenceの証明”迄視野に入ってきたと言って良い。従って“完全WKB解析の教科書執事”と云う計画は一時棚上げとして、理論そのものを一層深化させることに全力を傾注したい。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① T. Koike and Y. Takei: On the Voros coefficients for the Whittaker equation with a large parameter, Publ. RIMS, **47** (2011), in press. (査読中)
- ② T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter. II., Publ. RIMS, **47** (2011), 153-219. (査読有)
- ③ S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, Kyoto J. Math., **50** (2010), 101-164. (査読有)
- ④ T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II. Advanced Studies in Pure Mathematics, **54**, Math. Soc. Japan, 2009, 19-94. (査読有)
- ⑤ Y. Takei: Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B10** (2008), 205-224. (査読有)

[学会発表] (計9件)

- ① Y. Takei: An overview on the resurgent analysis of one-dimensional Schrödinger equations, RIMS 共同研究「Exact WKB analysis --- Borel summability of WKB solutions」, 京都大学数理解析研究所, 2010年9月8日.  
<研究代表者 (organizer)>

- ② Y. Takei: 1次元 Schrödinger 方程式の完全WKB解析---WKB解のBorel変換の特異点について---, RIMS 研究集会「可積分系数理の多様性」, 京都大学数理解析研究所, 2010年8月19日. <招待講演>
- ③ Y. Takei: On the turning point problem for instanton-type solutions of (higher order) Painlevé equations, International Conference “Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation” E. De Giorgi 数学研究センター(イタリア), 2009年10月16日. <招待講演>
- ④ S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point --- Alien calculus of WKB solutions through microlocal analysis, International Conference “Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation” E. De Giorgi 数学研究センター(イタリア), 2009年10月15日. <招待講演>
- ⑤ Y. Takei: Transformation theory for MTP equations and singularity structure of the Borel transform of their WKB solutions, RIMS 合宿型セミナー「Foundations of exact WKB analysis and resurgence theory」, 関西セミナーハウス, 2008年12月17日, 18日. <研究代表者 (Organizer)>

[図書] (計1件)

河合隆裕・竹井義次: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008, 146ページ。

[その他]

河合が Springer 社より近日刊行予定の啓蒙書「数理物理; 私の研究」に寄稿。